6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $N_1(3) = 500 \cdot e^{0,6\cdot 3} \approx 3025$

Im gegebenen Modell sind drei Tage nach Beobachtungsbeginn ungefähr 3025 Pantoffeltierchen in der Nährlösung vorhanden.

(2) $N_1(t) = 2000 \Leftrightarrow 500 \cdot e^{0,6\cdot t} = 2000 \Leftrightarrow e^{0,6\cdot t} = 4 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln(4)}{0,6} \approx 2,31$.

Im Modell sind ungefähr 2,31 Tage nach Beobachtungsbeginn 2000 Pantoffeltierchen in der Nährlösung enthalten.

(3) $\dfrac{1}{0,5-0} \cdot \displaystyle\int_0^{0,5} N_1(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{0,5}\left[500 \cdot \dfrac{1}{0,6} \cdot e^{0,6\cdot t}\right]_0^{0,5} = \dfrac{5000}{3} \cdot e^{0,3} - \dfrac{5000}{3} \cdot e^{0} \approx 583$.

Die durchschnittliche Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung während des ersten halben Tages der Beobachtung beträgt ungefähr 583.

(4) $\dfrac{N_1(0) + N_1(0,5)}{2} = \dfrac{500 \cdot e^0 + 500 \cdot e^{0,3}}{2} \approx 587$.

$$\frac{\dfrac{N_1(0) + N_1(0,5)}{2}}{\dfrac{1}{0,5-0} \cdot \displaystyle\int_0^{0,5} N_1(t)\,\mathrm{d}t} \approx 1,0075.$$

Das arithmetische Mittel der Funktionswerte $N_1(0)$ und $N_1(0,5)$ weicht um ungefähr 0,75 % und damit um weniger als 1 % von dem in (3) berechneten Durchschnitt ab.

(5) Arithmetisches Mittel $M(a)$ der Funktionswerte $N_1(a)$ und $N_1(a+0,5)$:

$$\frac{N_1(a) + N_1(a+0,5)}{2} = \frac{500 \cdot e^{0,6\cdot a} + 500 \cdot e^{0,6\cdot(a+0,5)}}{2} = 250 \cdot e^{0,6\cdot a} \cdot \left(1 + e^{0,3}\right).$$

Durchschnittliche Anzahl $D(a)$ der Pantoffeltierchen in einem Zeitintervall $[a; a+0{,}5]$:

$$\frac{1}{a+0{,}5-a} \cdot \int_a^{a+0{,}5} N_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{0{,}5} \cdot \left[500 \cdot \frac{1}{0{,}6} \cdot e^{0{,}6 \cdot t}\right]_a^{a+0{,}5} = \frac{5000}{3} \cdot e^{0{,}6 \cdot (a+0{,}5)} - \frac{5000}{3} \cdot e^{0{,}6 \cdot a}$$

$$= \frac{5000}{3} \cdot e^{0{,}6 \cdot a} \cdot \left(e^{0{,}3} - 1\right).$$

$$\frac{M(a)}{D(a)} = \frac{250 \cdot e^{0{,}6 \cdot a} \cdot \left(1 + e^{0{,}3}\right)}{\frac{5000}{3} \cdot e^{0{,}6 \cdot a} \cdot \left(e^{0{,}3} - 1\right)} = \frac{3 \cdot \left(1 + e^{0{,}3}\right)}{20 \cdot \left(e^{0{,}3} - 1\right)} \approx 1{,}0075.$$

Das arithmetische Mittel der Funktionswerte $N_1(a)$ und $N_1(a+0{,}5)$ weicht also unabhängig von a um ungefähr 0,75 % und damit um weniger als 1 % von der durchschnittlichen Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung in einem Zeitintervall $[a; a+0{,}5]$ ab.

Teilaufgabe b)

(1) Da für alle $t \in \mathbb{R}$ die Aussage $r_1(t) > 0$ gilt, ist die Änderungsrate von N_1 immer positiv, im Modell des Schülers nimmt daher die Anzahl der Pantoffeltierchen während der ersten drei Tage ständig zu.

Da zusätzlich für alle $t \in \mathbb{R}$ die Aussage $r_1'(t) > 0$ gilt, ist auch die Änderungsrate von r_1 immer positiv, die Anzahl der Pantoffeltierchen wächst daher im Modell des Schülers immer schneller.

(2) Da die Anzahl der Pantoffeltierchen immer schneller wächst, liegt die größte Wachstumsrate im Intervall $[0; 3]$ an der Stelle 3 vor.

$r_1(3) = 300 \cdot e^{1{,}8} \approx 1815$.

Die größte Wachstumsrate, die sich aus dem Modell für die ersten drei Tage ergibt, beträgt ungefähr 1815 Pantoffeltierchen pro Tag.

Teilaufgabe c)

(1) Im Sachzusammenhang bedeutet die Gleichung $r_2(3+a) = r_1(3-a)$, dass die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung im gleichen zeitlichen Abstand vor und nach dem Zeitpunkt „drei Tage nach Beobachtungsbeginn“ jeweils gleich schnell wächst.

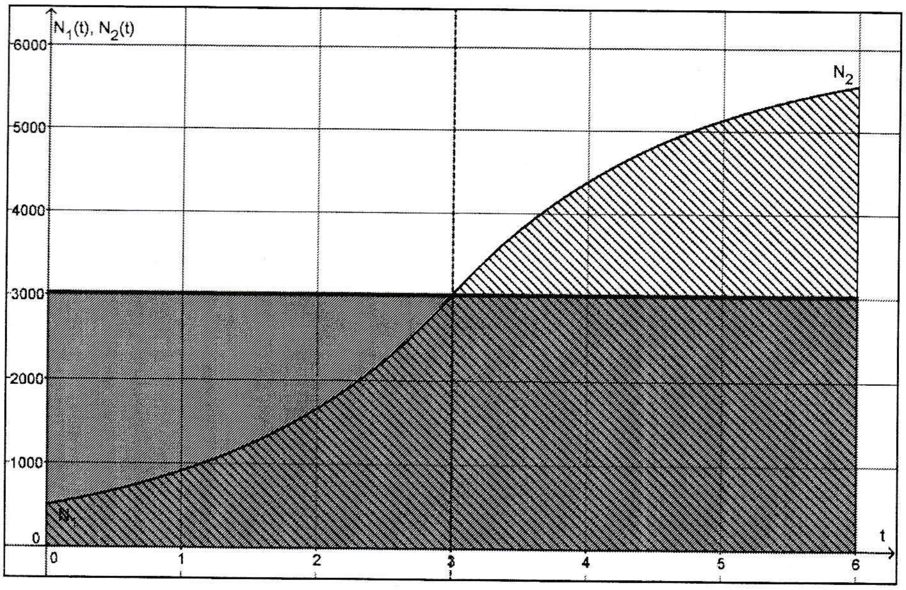
(2) Mit $3+a=t \Leftrightarrow a=t-3$ ergibt sich:

$$r_2(t)=r_1(3-(t-3))=r_1(6-t)=300\cdot e^{0,6\cdot(6-t)}=300\cdot e^{3,6-0,6\cdot t}.$$

(3) $$N_2(t)=N_1(3)+\int_3^t r_2(u)\,\mathrm{d}u=500\cdot e^{0,6\cdot 3}+\left[300\cdot\frac{1}{-0,6}\cdot e^{3,6-0,6\cdot u}\right]_3^t$$

$$=500\cdot e^{1,8}-500\cdot e^{3,6-0,6\cdot t}+500\cdot e^{1,8}=1000\cdot e^{1,8}-500\cdot e^{3,6-0,6\cdot t}.$$

(4)



$\int_0^3 N_1(t)\,\mathrm{d}t+\int_3^6 N_2(t)\,\mathrm{d}t$ kann geometrisch als Inhalt der Fläche interpretiert werden, die in der Abbildung oben schraffiert ist, $6\cdot N_1(3)$ kann als Inhalt des grauen Rechtecks in der Abbildung interpretiert werden. Da der Anteil der grau eingefärbten Fläche, die im Intervall $[0;3]$ oberhalb des Graphen von N_1 liegt, genauso groß ist wie der Anteil der schraffierten Fläche, die im Intervall $[3;6]$ oberhalb des grau eingefärbten Rechtecks liegt (vgl. Hinweis in der Aufgabenstellung), sind die grau eingefärbte Rechteckfläche und die schraffierte Fläche gleich groß, es gilt daher $\int_0^3 N_1(t)\,\mathrm{d}t+\int_3^6 N_2(t)\,\mathrm{d}t=6\cdot N_1(3)$.

(5) Für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt $500\cdot e^{3,6-0,6\cdot t}>0$. Daraus folgt für alle $t\in\mathbb{R}$:

$$N_2(t)=1000\cdot e^{1,8}-500\cdot e^{3,6-0,6\cdot t}<1000\cdot e^{1,8}\approx 6049,6<6050.$$

Bei Modellierung mit N_2 wird somit die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung nie größer als 6050.