Name: _____

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung

Eine Familie will ihren Bedarf an Wärmeenergie (thermischer Energie) für Heizung und Warmwasser teilweise durch eine thermische Solaranlage (kurz: Solaranlage) decken. Anhand der Angaben des Solaranlagenherstellers und der Verbrauchswerte der Familie aus dem letzten Kalenderjahr wurde das folgende Modell für ein beispielhaftes Kalenderjahr aufgestellt.

Die **Leistung der Solaranlage** wird durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400,\ t \in \mathbb{R},$$

und der thermische **Leistungsbedarf** der Familie (kurz: Leistungsbedarf) durch die Funktion g mit der Gleichung

$$g(t) = -t^4 + 26t^3 - 167{,}5t^2 - 12{,}5t + 2053,\ t \in \mathbb{R},$$

modelliert, und zwar für das Zeitintervall [0;12], das dem Kalenderjahr entspricht.

Dabei fasst man t als Maßzahl zur Einheit 1 Monat und $f(t)$ sowie $g(t)$ als Maßzahlen zur Einheit 1 Kilowattstunde pro Monat [kWh/Monat] auf. (Im Modell umfasst jeder Monat 30 Tage.) Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn des Kalenderjahres.

Die Graphen von f und g sind in der *Abbildung 1* auf *Seite 3* dargestellt.

a) (1) *Vergleichen Sie die Graphen von f und g im Sachzusammenhang.*

(2) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt der maximalen Leistung der Solaranlage und berechnen Sie den Maximalwert.*

(3) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt im Intervall [0;12], zu dem der durch g beschriebene Leistungsbedarf der Familie innerhalb dieses Kalenderjahres am stärksten abnimmt.*

(5 + 8 + 9 Punkte)

Name: _____

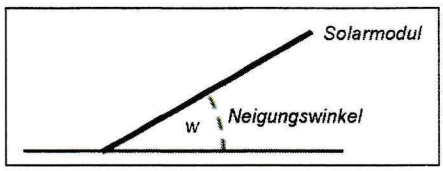
Durch das Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ ist im Sachzusammenhang die **aus der Solaranlage im Zeitintervall [*a*; *b*] abrufbare Energie** und durch das Integral $\int_a^b g(t)\,dt$ der **Energiebedarf der Familie im Zeitintervall [*a*; *b*]** für $0 \le a < b \le 12$ in Kilowattstunden [kWh] gegeben.

b) (1) *Berechnen Sie den Energiebedarf der Familie für das Kalenderjahr.*

(2) Im Intervall [3; 9,5] wird der Leistungsbedarf der Familie zu jedem Zeitpunkt durch die Solaranlage gedeckt. Die den Bedarf übersteigende Leistung der Solaranlage soll in diesem Zeitraum zusätzlich zum Heizen eines Gartenpools genutzt werden.
Ermitteln Sie die Energie, die zum Heizen des Gartenpools im Intervall [3;9,5] zur Verfügung steht.

(4 + 6 Punkte)

c) Die Leistung der Solaranlage ist abhängig von der Neigung der aufgestellten Solarmodule. Die Funktion f_a mit der Gleichung



$$f_a(t) = a \cdot \left(t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400\right) - 400 \cdot \left(a^2 - 1\right),\ t \in \mathbb{R},\ 0{,}5 \le a \le 1{,}5,$$

modelliert im Intervall [0;12] diese Leistung für ein Kalenderjahr, wobei der Parameter *a* eine Kennzahl für die Neigung der Solarmodule ist. Jedem Wert des Parameters *a* kann über die Gleichung $w = 116 - 66 \cdot a$ die Maßzahl für den entsprechenden Neigungswinkel in Grad zugeordnet werden.

In der *Abbildung 2* auf *Seite 3* sind beispielhaft für zwei Werte von *a* die Graphen der jeweils zugehörigen Funktion f_a sowie der Graph von *g* dargestellt.

(1) *Zeigen Sie, dass f eine der Funktionen f_a ist, und berechnen Sie den zugehörigen Neigungswinkel w der Solarmodule.*

(2) *Weisen Sie nach, dass die in einem Jahr aus der Solaranlage abrufbare Energie für $a = 1{,}364$ (d. h. $w \approx 26°$) am größten ist.*

Name: _____

(3) Der Solaranlagenhersteller behauptet, dass eine Solaranlage mit einem Neigungswinkel von 50° den Energiebedarf der Familie (ohne Heizung des Gartenpools!) in dem Kalenderjahr besser deckt als eine Solaranlage mit einem Neigungswinkel von 26°.

Begründen Sie diese Behauptung anhand der Graphen in Abbildung 2.

[Eine Rechnung wird hier nicht verlangt.]

(4 + 9 + 5 Punkte)

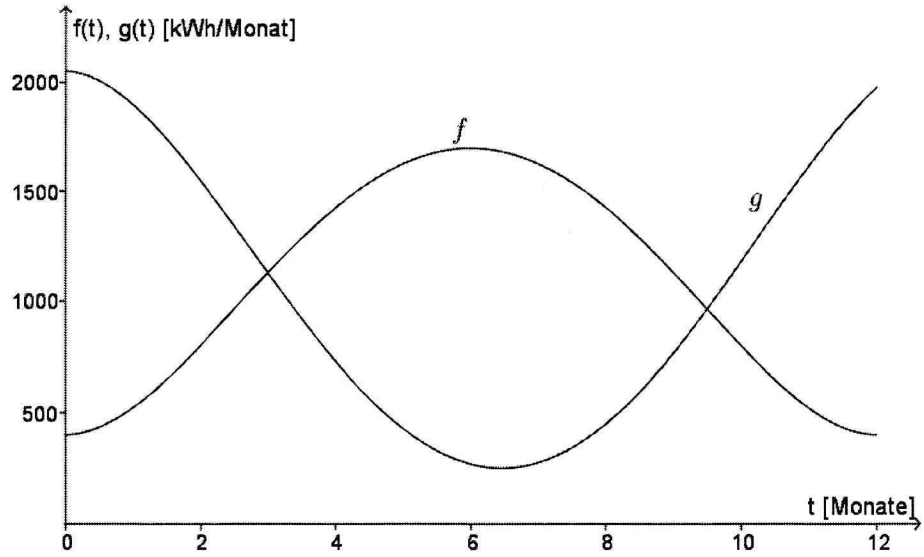


Abbildung 1

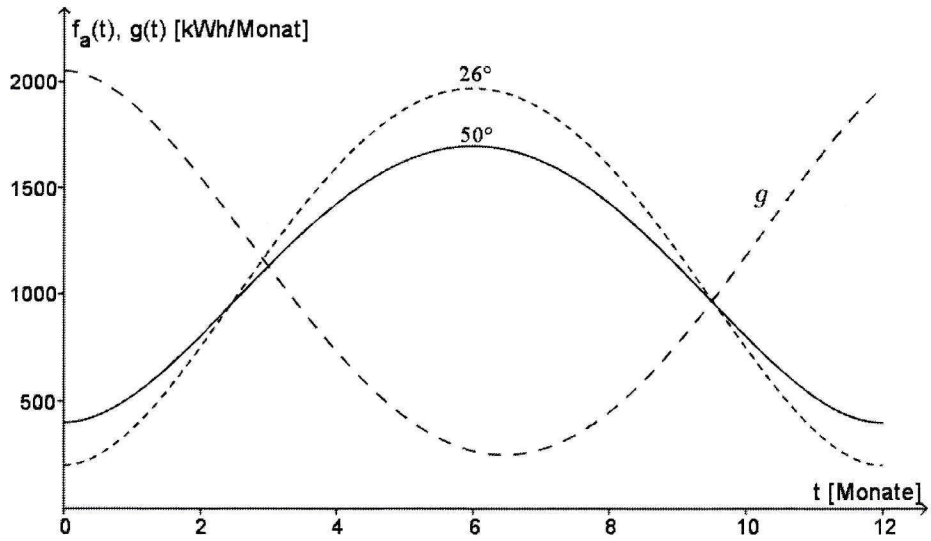


Abbildung 2