6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Zu Beginn des Kalenderjahres ist der Leistungsbedarf maximal, während die Leistung der Solaranlage minimal ist. Bis zur Jahresmitte wächst die Leistung der Solaranlage an, während der Leistungsbedarf der Familie in diesem Zeitraum zurückgeht. In der zweiten Jahreshälfte nimmt der Leistungsbedarf dann wieder zu, während die Leistung der Solaranlage abnimmt. Von Anfang Januar bis etwa Ende März und von Mitte Oktober bis zum Jahresende übersteigt der Leistungsbedarf der Familie die Leistung der Solaranlage. Im Zeitraum von Anfang April bis Mitte Oktober ist die Leistung der Solaranlage dann größer als der Leistungsbedarf der Familie.

(2) Für den Zeitpunkt der maximalen Leistung, der im Intervall [0;12] angenommen wird, kommen nur Nullstellen von f' oder die Randstellen in Frage.

$f'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$.

Nullstellen von f':

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 - 18t + 72 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 6 \vee t = 12$.

Mit $f(0) = f(12) = 400$ und $f(6) = 1696$ folgt somit, dass die maximale Leistung der Solaranlage nach 6 Monaten erreicht wird. Diese beträgt $1696 \ \frac{\text{kWh}}{\text{Monat}}$.

(3) Der Leistungsbedarf der Familie nimmt innerhalb des Kalenderjahres zu dem Zeitpunkt am stärksten ab, zu dem g' minimal und negativ ist. Somit ist der Zeitpunkt des globalen Minimums von g', das im Intervall $[0;12]$ angenommen wird, zu ermitteln. Dafür kommen nur die Nullstellen von g'' oder die Randstellen in Frage.

Es ist $g'(t) = -4t^3 + 78t^2 - 335t - 12{,}5$ und $g''(t) = -12t^2 + 156t - 335$.

Die Gleichung $g''(t) = 0$ hat die Lösungen

$$t_1 = \frac{13}{2} - \sqrt{\frac{43}{3}} \approx 2{,}714 \text{ und } t_2 = \frac{13}{2} + \sqrt{\frac{43}{3}} \approx 10{,}286.$$

Aus den Funktionswerten $g'(0) = -12{,}5$, $g'(12) = 287{,}5$, $g'(t_1) \approx -427{,}1 < 0$ und $g'(t_2) \approx 441{,}1$ folgt, dass t_1 die globale Minimalstelle von g' ist.

Der Leistungsbedarf der Familie nimmt innerhalb des Kalenderjahres somit nach etwa 2,7 Monaten am stärksten ab.

Teilaufgabe b)

(1) Der Energiebedarf der Familie in dem Kalenderjahr lässt sich durch $\int_0^{12} g(t)\mathrm{d}t$ ermitteln.

$$\int_0^{12} g(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{5}t^5 + \frac{13}{2}t^4 - \frac{335}{6}t^3 - \frac{25}{4}t^2 + 2053t\right]_0^{12} = 12273{,}6.$$

Der Energiebedarf beträgt somit etwa 12274 kWh $\approx 12{,}3$ MWh.

(2) Laut Voraussetzung gilt $f(t) \geq g(t)$ für alle $3 \leq t \leq 9{,}5$. Somit gilt für die zu ermittelnde Energie:

$$\int_3^{9,5} \left(f(t) - g(t)\right)\mathrm{d}t = \int_3^{9,5} \left(2t^4 - 50t^3 + 311{,}5t^2 + 12{,}5t - 1653\right)\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{25}{2}t^4 + \frac{623}{6}t^3 + \frac{25}{4}t^2 - 1653t\right]_3^{9,5}$$

$$\approx 3022{,}623 - \left(-3014{,}55\right) = 6037{,}173.$$

Durch die Solaranlage stehen im Intervall $[3;9{,}5]$ etwa 6037 kWh Energie für die Heizung des Gartenpools zur Verfügung.

Teilaufgabe c)

(1) Durch den Vergleich der Leitkoeffizienten kommt für den Parameter nur $a=1$ in Frage.

Nachweis:

$$f_1(t) = 1\cdot\left(t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400\right) - 400\cdot\left(1^2-1\right) = t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400 = f(t).$$

Mit Hilfe der angegebenen Formel ergibt sich für $a=1$ der Neigungswinkel

$w = 116° - 66°\cdot 1 = 50°$.

(2) Für die in dem Kalenderjahr abrufbare Energie aus der Solaranlage gilt in Abhängigkeit vom Parameter a:

$E(a) = \int_0^{12} f_a(t)\mathrm{d}t = F_a(12) - F_a(0)$, wobei F_a eine Stammfunktion von f_a ist.

Eine mögliche Stammfunktion F_a hat die Gleichung

$$F_a(t) = a\cdot\left(\frac{1}{5}t^5 - 6t^4 + 48t^3 + 400t\right) - 400\cdot\left(a^2-1\right)t\,.$$

Es gilt $F_a(0) = 0$ und

$$F_a(12) = a\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot 12^5 - 6\cdot 12^4 + 48\cdot 12^3 + 400\cdot 12\right) - 400\cdot\left(a^2-1\right)\cdot 12$$
$$= 13094{,}4a - 4800\cdot\left(a^2-1\right) = -4800a^2 + 13094{,}4a + 4800.$$

Somit folgt:

$$E(a) = \int_0^{12} f_a(t)\mathrm{d}t = -4800a^2 + 13094{,}4a + 4800.$$

Da der Graph von E eine nach unten geöffnete Parabel ist, ist die Energie genau dann maximal, wenn $E'(a) = 0$ gilt.

Mit $E'(a) = -9600a + 13094{,}4$ und $E'(1{,}364) = -9600\cdot 1{,}364 + 13094{,}4 = 0$ ist die Behauptung nachgewiesen.

(3) Der Energiebedarf der Familie sowie die von der Solaranlage bereitgestellte Energie wird durch die jeweilige Fläche unterhalb des entsprechenden Graphen in *Abbildung 2* repräsentiert. Da die Fläche unterhalb des Graphen für eine um 50° geneigte Solaranlage einen größeren Anteil der Fläche unterhalb von g überdeckt als die Fläche unterhalb des Graphen für eine Solaranlage mit 26° Neigungswinkel, wird ein höherer Anteil des Energiebedarfs durch die Solaranlage mit dem 50°-Neigungswinkel gedeckt.