Etwas zum „Aufwärmen“:

Ableitungen:

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$.

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$u(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad u'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v(x) = e^{2x}$ $\quad v'(x) = 2 \cdot e^{2x}$

$f'(x) = u'v + uv' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{2x} + \sqrt{x} \cdot 2 \cdot e^{2x}$

$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\right) \cdot e^{2x}$

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (4 + e^{3x})^5$.

$f'(x) = 15 e^{3x} \cdot (4 + e^{3x})^4$

Integrale:

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}dx$.

$$= \int_0^1 4\cdot(2x+1)^{-3}\,dx = \left[4\cdot\frac{1}{-2}(2x+1)^{-2}\cdot\frac{1}{2}\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{9}-(-1) = \underline{\underline{\frac{8}{9}}}$$

Berechnen Sie das Integral $\int_0^\pi \left(4x - \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)dx$.

$$= \left[2x^2 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_0^\pi$$

$$= \left(2\pi^2 + \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}\right) - \left(0 + 2\underbrace{\cos(0)}_{1}\right)$$

$$= \underline{\underline{2\pi^2 - 2}}$$

Die Entwicklung einer Population in den Jahren 1960 bis 2020 lässt sich durch zwei Funktionen modellhaft beschreiben.

Die Funktion g mit $g(t) = 400 + 20 \cdot (t+1)^2 \cdot e^{-0,1t}$ beschreibt die Geburtenrate und

die Funktion s mit $s(t) = 600 + 10 \cdot (t-6)^2 \cdot e^{-0,09t}$ beschreibt die Sterberate der Population (t in Jahren seit Beginn des Jahres 1960, g(t) und s(t) in Individuen pro Jahr).

a) Bestimmen Sie die geringste Sterberate. ✓

In welchem Jahr war die Differenz aus Geburten- und Sterberate am größten?

$d(t) = g(t) - s(t)$ ⇐

Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Population zugenommen hat.

Nullstellen von $d(t)$

$t_1 \approx 3,2$ $\quad$ $t_2 \approx 45,3$

Zeitraum: 1963 – 2005

$t = 0$

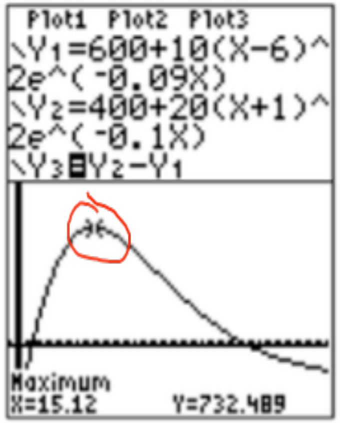
Minimum von $s(t)$ für $t = 6$

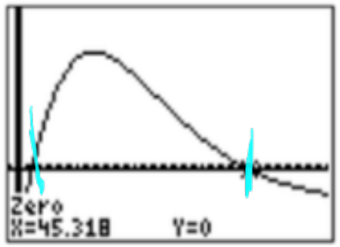
$s(6) = 600$

600 Ind/Jahr

GTR liefert Maximum für $t \approx 15,1$

↳ im Jahr 1975 !





b) Zu Beginn des Jahres 1960 bestand die Population aus 20 000 Individuen.

Berechnen Sie den Bestand der Population zu Beginn des Jahres 2017.

In welchem Jahr erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von 1960?

$$B(t) = 20000 + \int_0^t d(x)\,dx$$

2017: $B(57) = 20000 + \int_0^{57} (g(x) - s(x))\,dx \approx 35636$

$$B(t) = 20000 \Rightarrow \int_0^t (g(x) - s(x))\,dx = 0$$

GTR liefert $t \approx 6,87$

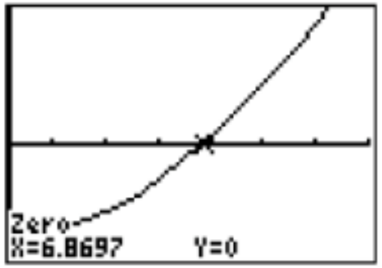
Im Jahr 1966!

```
Plot1  Plot2  Plot3
\Y1=600+10(X-6)^
2e^(-0.09X)
\Y2=400+20(X+1)^
2e^(-0.1X)
20000+fnInt(Y2-Y
1,X,0,57)
              35635.9586
```

```
Plot1  Plot2  Plot3
\Y1=600+10(X-6)^
2e^(-0.09X)
\Y2=400+20(X+1)^
2e^(-0.1X)
\Y3=fnInt(Y2-Y1,
X,0,X)
```

```
EQUATION SOLVER
eqn:0=Y3
```

```
Y3=0
▪X=6.8697262317…
 bound={3.2,10}
▪left-rt=-1E-11
```



Betrachtet wird nun das Größenwachstum eines einzelnen Individuums der Population. Dies kann im Beobachtungszeitraum durch das Gesetz des beschränkten Wachstums modelliert werden. Man geht davon aus, dass dieses Individuum in ausgewachsenem Zustand 0,8 m groß ist. Zu Beobachtungsbeginn betragen seine Größe 0,5 m und seine momentane Wachstumsgeschwindigkeit 0,15 m pro Jahr.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Funktion, die die Körpergröße des Individuums in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
   Wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des Individuums um 50 % zugenommen?

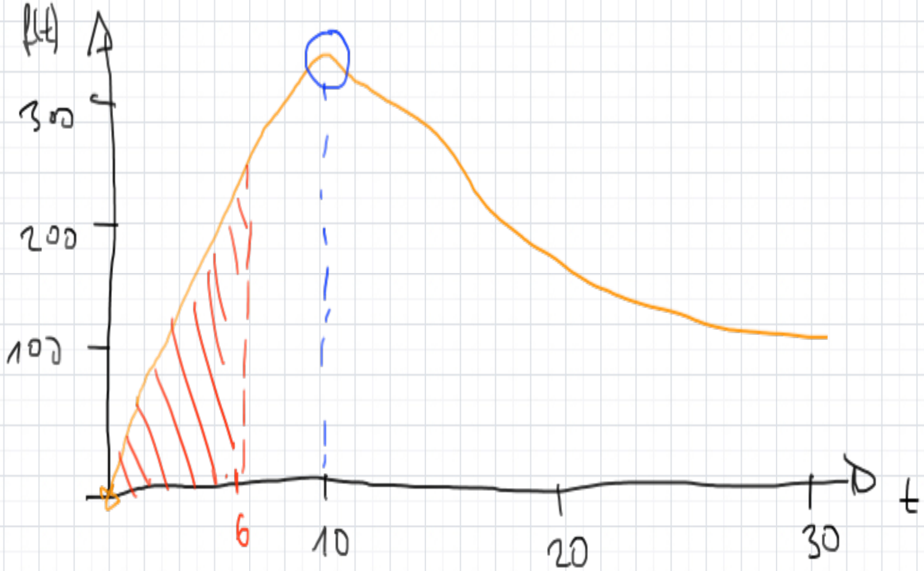
Die Anzahl ankommender Fahrzeuge vor einem Grenzübergang soll modelliert werden.

Dabei wird die momentane Ankunftsrate beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1\,300\,000 \cdot t}{t^4 + 30\,000}; \quad 0 \le t \le 30$$

(t in Stunden nach Beobachtungsbeginn; f(t) in Fahrzeuge pro Stunde).

Anfangs befinden sich keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang.



Anfangs befinden sich keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f. ✓

Wann ist die momentane Ankunftsrate maximal? ✓

Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden ankommen. ✓

GTR liefert Max für $t=10$

Anzahl in den ersten 6 Stunden:

GTR: $\int_0^6 f(t)\,dt \approx 769{,}050$

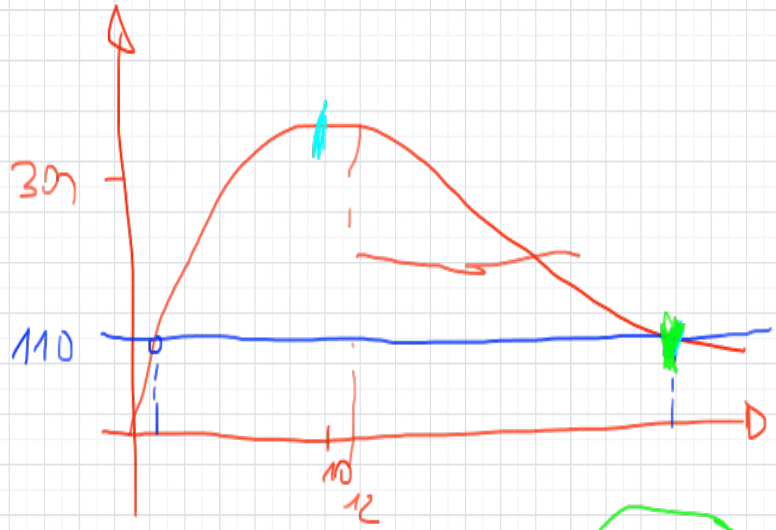
$\Rightarrow$ etwa 770 Fahrzeuge

b) Am Grenzübergang werden die Fahrzeuge möglichst schnell abgefertigt, jedoch ist die momentane Abfertigungsrate durch 110 Fahrzeuge pro Stunde begrenzt.

Wann beginnen sich die Fahrzeuge vor dem Grenzübergang zu stauen?

Wie viele Fahrzeuge stauen sich maximal vor dem Grenzübergang?

Welches Ergebnis erhielte man, wenn die momentane Abfertigungsrate 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn auf konstant 220 Fahrzeuge pro Stunde erhöht würde?



$t_1 \approx 2{,}5$ $\qquad$ $t_2 \approx 21{,}9$

$f(t) = 110$

ca. 2,5 Std. nach Beob.-beginn!

$$\int_{t_1}^{t_2} (f(t) - 110)\,dt \approx 2325$$

$$\int_{t_1}^{12} (f(t) - 110)\,dt + \int_{12}^{t_2} (f(t) - 220)\,dt \approx 1602$$