



Name: \_\_\_\_\_

## Abiturprüfung 2015

### Mathematik, Leistungskurs

#### Aufgabenstellung

Für jede positive reelle Zahl  $a$  sind eine Funktion  $f_a$  mit der Gleichung  $f_a(x) = (x^2 + ax + 1) \cdot e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , und eine Funktion  $p_a$  mit der Gleichung  $p_a(x) = x^2 + (a+2)x + a+1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , gegeben.

Die Graphen von  $f_{2,5}$  und  $p_{2,5}$  sind in der *Abbildung 1* dargestellt.

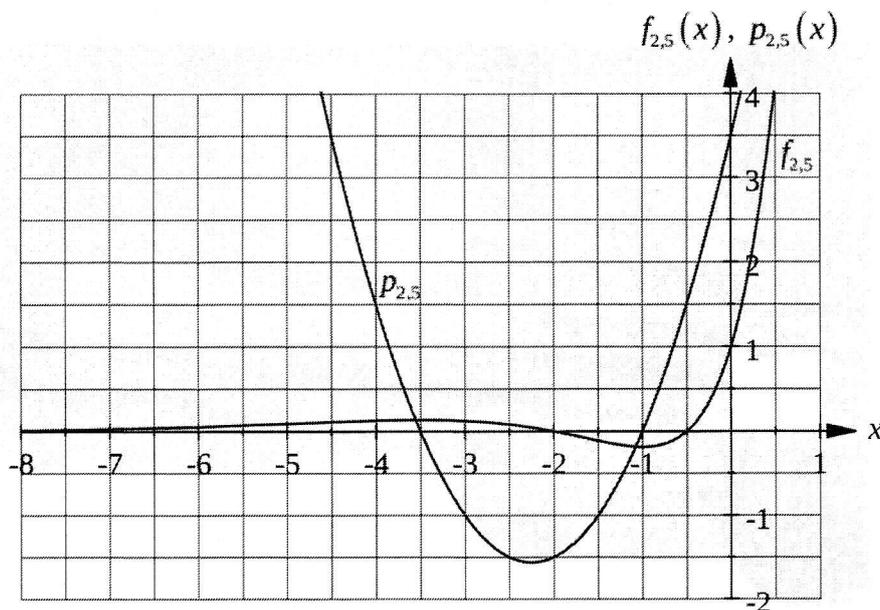


Abbildung 1

Es sei nun  $a$  eine beliebige positive reelle Zahl.

- a) (1) *Ermitteln Sie das Intervall auf der x-Achse, für das der Graph der Funktion  $p_a$  unterhalb der x-Achse verläuft.*

[Zur Kontrolle: Das gesuchte Intervall ist  $]-1 - a; -1[.$ ]

- (2) *Zeigen Sie: Es gilt  $f'_a(x) = p_a(x) \cdot e^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .*
- (3) *Bestimmen Sie die Stellen, an denen die Funktion  $f_a$  ein lokales Maximum bzw. Minimum besitzt.*

(5 + 5 + 6 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

b) (1) Bestimmen Sie dasjenige  $a > 0$ , für das die Funktion  $f_a$  genau eine Nullstelle hat.

(2) Berechnen Sie die zugehörige Nullstelle.

(5 + 3 Punkte)

c) Betrachten Sie nun die Funktion  $k$  mit der Gleichung  $k(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , und die Funktion  $h_a$  mit der Gleichung  $h_a(x) = f_a(x) - k(x) = (x^2 + ax) \cdot e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(1) Ermitteln Sie mit Hilfe eines Integrationsverfahrens eine Stammfunktion der Funktion  $h_a$ .

[Zur Kontrolle: Zum Beispiel ist die Funktion  $H_a$  mit der Gleichung

$$H_a(x) = (x^2 + (a-2)x + 2 - a) \cdot e^x \text{ eine Stammfunktion von } h_a.]$$

(2) Berechnen Sie in Abhängigkeit von  $a$  den Inhalt  $A(a)$  der Fläche, die von den Graphen der Funktionen  $f_a$  und  $k$  eingeschlossen wird.

$$[\text{Zur Kontrolle: } A(a) = |2 - a - (a+2) \cdot e^{-a}|]$$

(6 + 6 Punkte)

d) Für  $a = 2,5$  erhält man die Funktion  $f_{2,5}$  mit der Gleichung

$$f_{2,5}(x) = (x^2 + 2,5x + 1) \cdot e^x, x \in \mathbb{R}.$$

(1) Ermitteln Sie mit Hilfe von c) (1) eine Stammfunktion der Funktion  $f_{2,5}$ .

[Zur Kontrolle: Zum Beispiel ist die Funktion  $F_{2,5}$  mit der Gleichung

$$F_{2,5}(x) = (x^2 + 0,5x + 0,5) \cdot e^x \text{ eine Stammfunktion von } f_{2,5}.]$$

(2) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion  $f_{2,5}$  und der  $x$ -Achse eingeschlossen wird.

[Zur Kontrolle: Der gesuchte Flächeninhalt beträgt ungefähr 0,17 [FE]]

(3) In der Abbildung 2 auf Seite 3 ist die Fläche schraffiert, die von den Graphen der Funktionen  $f_{2,5}$  und  $k$  eingeschlossen wird.

Die  $x$ -Achse teilt diese Fläche.

Berechnen Sie das Verhältnis der größeren zur kleineren Teilfläche.

(4 + 6 + 4 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

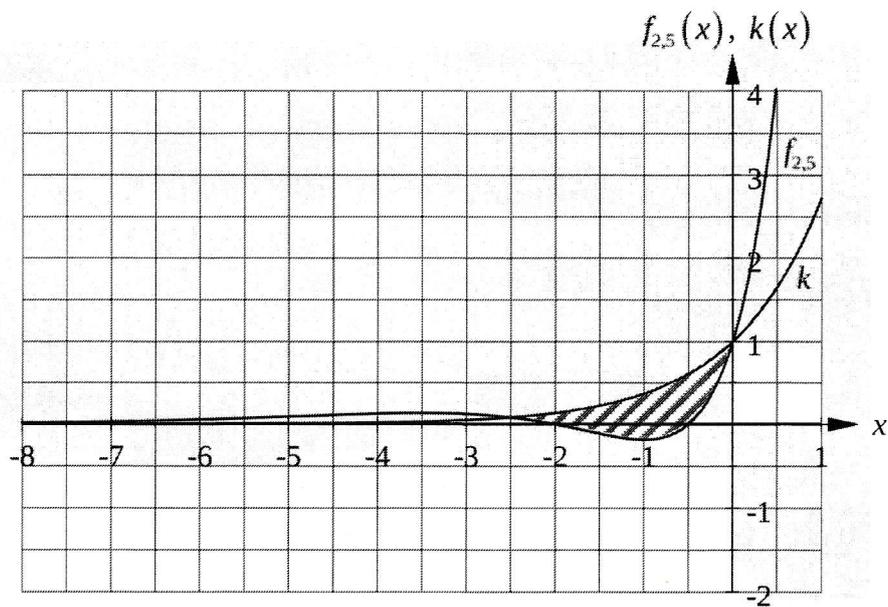


Abbildung 2

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung