6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Der Graph der quadratischen Funktion p_a ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Berechnung der Schnittstellen mit der x-Achse: $p_a(x)=0 \Leftrightarrow x^2+(a+2)x+a+1=0$.

Die quadratische Gleichung hat die Diskriminante

$D=\frac{(a+2)^2}{4}-a-1=\frac{a^2+4a+4-4a-4}{4}=\frac{a^2}{4}$. Somit besitzt sie die Lösungen

$x_1=-\frac{a+2}{2}+\frac{a}{2}=-1$ und $x_2=-\frac{a+2}{2}-\frac{a}{2}=-1-a$.

Das gesuchte Intervall ist demnach $\left]-1-a;-1\right[$.

(2) Es gilt $f_a'(x)=(2x+a)\cdot e^x+\left(x^2+ax+1\right)\cdot e^x=\left(x^2+(a+2)x+a+1\right)\cdot e^x=p_a(x)\cdot e^x$.

(3) Wegen $f_a'(x)=p_a(x)\cdot e^x$ und $e^x>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ ergibt sich aus a) (1):

Für alle $x\in\left]-1-a;-1\right[$ ist $f_a'(x)<0$ und für alle x mit $x<-1-a$ bzw. $x>-1$ ist $f_a'(x)>0$. Damit nimmt die Funktion f_a an der Stelle $x_{E_1}=-1-a$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x_{E_2}=-1$ ein lokales Minimum an.

Teilaufgabe b)

(1) Wegen $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + 1 = 0$. Die quadratische Gleichung hat die Diskriminante $D = \frac{a^2}{4} - 1$. Somit hat die Funktion f_a genau dann eine einzige Nullstelle, wenn $D = 0$ ist. Wegen $a > 0$ heißt das $a = 2$.

(2) Die Nullstelle erhält man z. B. mit $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Teilaufgabe c)

(1) Mit Hilfe partieller Integration erhält man:

$$\int \left(x^2 + ax\right) \cdot e^x \, dx = \left(x^2 + ax\right) \cdot e^x - \int (2x + a) \cdot e^x \, dx$$
$$= \left(x^2 + ax\right) \cdot e^x - (2x + a) \cdot e^x + \int 2 \cdot e^x \, dx = \left(x^2 + (a-2)x + 2 - a\right) \cdot e^x + C.$$

(2) Schnittstellen der Graphen der Funktionen f_a und k:

$$f_a(x_S) = k(x_S) \Leftrightarrow \left(x_S^{\ 2} + ax_S + 1\right) \cdot e^{x_S} = e^{x_S} \Leftrightarrow x_S^{\ 2} + ax_S + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow x_S^{\ 2} + ax_S = 0 \Leftrightarrow x_S\left(x_S + a\right) = 0 \Leftrightarrow x_S = 0 \vee x_S = -a.$$

Nun erhält man $A(a) = \left|\int_{-a}^{0} h_a(x)\,dx\right|$. Nach c) (1) erhält man

$$A(a) = \left|\left[\left(x^2 + (a-2)x + 2 - a\right) \cdot e^x\right]_{-a}^{0}\right| = \left|2 - a - \left(a^2 - (a-2)a + 2 - a\right) \cdot e^{-a}\right|$$
$$= \left|2 - a - (a+2) \cdot e^{-a}\right|.$$

[Es wird nicht verlangt: Da im Intervall $]-a;0[$ der Graph von k oberhalb des Graphen von f_a verläuft, ist $A(a) = (a+2) \cdot e^{-a} + a - 2$.]

Teilaufgabe d)

(1) Es gilt $f_{2,5}(x) = h_{2,5}(x) + e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $\int f_{2,5}(x)\,dx = \int h_{2,5}(x)\,dx + \int e^x\,dx$.

Nach c) (1) ergibt sich, indem man $a = 2{,}5$ setzt:

$$\int f_{2,5}(x)\,dx = \left(x^2 + 0{,}5x - 0{,}5\right) \cdot e^x + e^x + C = \left(x^2 + 0{,}5x + 0{,}5\right) \cdot e^x + C.$$

(2) Nullstellen der Funktion $f_{2,5}$:

$$f_{2,5}(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2{,}5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -0{,}5.$$

Also ist der gesuchte Flächeninhalt

$$I = \left| \int_{-2}^{-0{,}5} f_{2,5}(x)\,dx \right| = \left| \left[\left(x^2 + 0{,}5x + 0{,}5\right) \cdot e^x \right]_{-2}^{-0{,}5} \right| \approx \left|0{,}3 - 0{,}47\right| = 0{,}17\ [\text{FE}].$$

(3) Nach d) (2) gilt für den Inhalt A_2 der Fläche unterhalb der x-Achse $A_2 \approx 0{,}17\ [\text{FE}]$.

Es sei A_1 der Inhalt der Fläche oberhalb der x-Achse. Aus c) (2) erhält man für $a = 2{,}5$

$A_1 + A_2 = A(2{,}5) \approx 0{,}87\ [\text{FE}]$. Daher ist $A_1 \approx 0{,}7\ [\text{FE}]$. Daraus folgt: $\dfrac{A_1}{A_2} \approx 4{,}12$.

(Abweichungen in der zweiten Nachkommastelle sind aufgrund der Rundung möglich.)

[Alternative: $A_1 : A_2 \approx 70 : 17$]