6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) (*) Die Punkte O, A, B und C liegen in der x_1x_2 -Ebene.

(**) Wegen der Kongruenz der Seitendreiecke gilt $|\overline{OA}| = |\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CO}|$.

(***) Wegen $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$ besitzt das Viereck bei O einen rechten Winkel.

Aus (*), (**) und (***) folgt, dass das Viereck $OABC$ ein Quadrat ist.

(2) Berechnung der Oberfläche der Pyramide:

Es gilt $\overline{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit folgt $|\overline{OA}| = \sqrt{100} = 10$ [LE].

$M_{\overline{OA}} = (3 | 4 | 0)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OA}$.

Mit der Kongruenz der Seitendreiecke ergibt sich:

$$F_{\Delta OAS} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{OA}| \cdot |\overline{SM_{\overline{OA}}}| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix} \right| = 5 \cdot \sqrt{125} = 25 \cdot \sqrt{5} \text{ [FE]}.$$

$$O_{\text{Pyramide}} = G + 4 \cdot F_{\Delta OAS} = 100 + 100 \cdot \sqrt{5} = 323,606\dots \approx 323,61 \text{ [FE]}.$$

Teilaufgabe b)

(1) Als eine Gleichung der Ebene E in Parameterform ergibt sich:

$$E: \vec{x} = \overline{OB} + u \cdot \overline{CB} + v \cdot \overline{QB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}, \text{ bzw.}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Es sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E , d. h.

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0. \quad \text{Man erhält das lineare Gleichungssystem}$$

$$\begin{cases} 3n_1 + 4n_2 = 0 \\ -n_1 + 2n_2 - 2n_3 = 0 \end{cases}.$$

Mit $n_1 = -4$ erhält man $n_2 = 3$ und $n_3 = 5$.

$$\text{Es ergibt sich } E: \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \text{und somit } E: \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 50 = 0.$$

Daraus folgt die Koordinatengleichung

$$E: -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 50.$$

(2) $-4a \cdot (-2) + 3a \cdot 14 + 25 \cdot 0 = 50a$ ist für alle $a \in \mathbb{R}$ wahr. Also ist $B \in E_a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

$-4a \cdot (-8) + 3a \cdot 6 + 25 \cdot 0 = 50a$ ist für alle $a \in \mathbb{R}$ wahr. Also ist $C \in E_a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(3) Schnittgebilde:

Strecke $\overline{CB}$ [für $a < 0 \vee a > 10$]

Dreieck CBS [für $a = 10$]

gleichschenkliges Trapez [für $0 < a < 10$]

Quadrat $OABC$ [für $a = 0$]

- (4) Die Punkte C und B liegen in allen Ebenen E_a .

$$S \in E_a \Leftrightarrow -4a \cdot (-1) + 3a \cdot 7 + 25 \cdot 10 = 50a \Leftrightarrow a = 10.$$

Für $a = 10$ ist das Dreieck BCS das Schnittgebilde von Ebene und Pyramide.

- (5) Die Ebene E teilt die Pyramide $OABCS$ in eine „kleine“ Pyramide (ebenfalls mit der Spitze S) und einen „Restkörper“. Die Höhe der „kleinen“ Pyramide ist der Abstand des Punktes S von der Ebene E .

$$\text{Hesse'sche Normalenform von } E: \frac{-4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 50}{\sqrt{50}} = 0.$$

Die Höhe der kleinen Pyramide beträgt

$$h_1 = \left| \frac{-4 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 10 - 50}{\sqrt{50}} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ [LE]}, \text{ ihr Volumen}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{400 \cdot \sqrt{2}}{9} \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{400 \cdot \sqrt{2}}{9} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{2000}{27} \text{ [VE]}.$$

Das Volumen V der Pyramide $OABCS$ beträgt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 10 = \frac{9000}{27} \text{ [VE]}. \text{ Somit gilt für das Volumen } V_2 \text{ des Restkörpers:}$$

$$V_2 = V - V_1 = \frac{7000}{27} \text{ [VE]}.$$

Ein gesuchtes Verhältnis ist $V_1 : V_2 = 2 : 7$.

[Auch der Kehrwert ist möglich.]

Teilaufgabe c)

(1) Gleichung der Geraden durch A und S: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}).$

Da P auf g liegt, gilt $P = (6 - 7r \mid 8 - r \mid 10r).$

$\overline{OP}$ ist orthogonal zu AS , also orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{a}_g$ von g , also gilt

$$\overline{OP} \cdot \vec{a}_g = 0. \quad \begin{pmatrix} 6-7r \\ 8-r \\ 10r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -42 + 49r - 8 + r + 100r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}.$$

Da man nur eine mögliche Lösung erhält, ist $P = \left(\frac{11}{3} \mid \frac{23}{3} \mid \frac{10}{3} \right)$ der gesuchte Punkt.

(2) Der Punkt P liegt auf $\overline{AS}$, da beispielsweise $\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{AS}$ gilt.

Wenn man über die Kante $\overline{AS}$ geht, ist der kürzeste Weg von O zur Geraden g das Lot von O auf g . Entsprechendes gilt für den kürzesten Weg von B zur Geraden g . Da P nach c (1) Fußpunkt des Lotes von O auf g und Fußpunkt des Lotes von B auf g ist, ist der Streckenzug $\overline{OPB}$ der kürzeste Weg von A nach C über die Dreiecksflächen OAS und ABS der Pyramide. Da die Ebene H , die durch O , B und S bestimmt ist, eine Symmetrieebene der Pyramide ist, gibt es keinen kürzeren Weg über die Dreiecksflächen OCS und CBS .

Länge des kürzesten Weges: $l = |\overline{OP}| + |\overline{BP}| = \frac{10}{3} \cdot \sqrt{30} = 18,257... \approx 18,26[\text{LE}].$

- (3) Da die Ebene H (siehe c (2)) eine Symmetrieebene der Pyramide ist, ist ein zu $\overline{OPB}$ entsprechender Streckenzug $\overline{ONB}$ „über“ die Kante $\overline{CS}$ ebenso lang wie der Streckenzug $\overline{OPB}$ und damit auch ein kürzester Weg von O nach B über den Mantel der Pyramide. Die Ebene H ist orthogonal zur x_1x_2 -Ebene. Also liegt der Punkt $N(t_1 | t_2 | t_3)$ in „gleicher Höhe über der Grundfläche“ wie der Punkt P . Deswegen ist N auch der Schnittpunkt der Geraden durch C und S mit der Ebene mit der Gleichung $x_3 = \frac{10}{3}$.

$$\text{Gleichung der Geraden durch } C \text{ und } S: h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Schnittpunktberechnung von h und der Ebene mit der Gleichung $x_3 = \frac{10}{3}$:

$$\frac{10}{3} = 10 \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \text{ und damit } N\left(-\frac{17}{3} \mid \frac{19}{3} \mid \frac{10}{3}\right).$$

[Alternative:

Aufgrund der Symmetrie zur Ebene H und wegen $\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{AS}$ erhält man

$$\overline{ON} = \overline{OC} + \frac{1}{3}\overline{CS} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{3} \\ \frac{19}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}.]$$