



Name: \_\_\_\_\_

## Abiturprüfung 2015

### Mathematik, Leistungskurs

---

#### Aufgabenstellung

Im Folgenden betrachten wir die Entwicklung von Wolfspopulationen. Dabei beschränken wir uns **ausschließlich** auf die **weiblichen** Mitglieder einer Population, die aus Welpen ( $w$ ), jungen Fähen ( $j$ ) sowie ausgewachsenen Fähen ( $a$ ) bestehen soll. Alle Fähen sind vermehrungsfähig. Die Welpen entwickeln sich ein Jahr nach der Geburt zu jungen Fähen und ein Jahr später zu ausgewachsenen Fähen.

Die folgende *Tabelle* zeigt die Verteilung einer in der Wildnis lebenden Population für die Jahre 2013 und 2014:

	2013	2014
$w$	65	52
$j$	8	26
$a$	20	16

*Tabelle*

Modellhaft lässt sich die Entwicklung mit der Matrix  $A$  beschreiben:

$$\begin{array}{l} \text{von: } w \quad j \quad a \\ \text{nach:} \\ \begin{array}{l} w \\ j \\ a \end{array} A = \begin{pmatrix} 0 & 1,5 & 2 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,6 \end{pmatrix} \end{array}$$

- a) (1) *Begründen Sie mit den Daten aus der Tabelle, dass  $b = 0,4$  gilt.*
- (2) *Interpretieren Sie die weiteren von Null verschiedenen Einträge in der Matrix  $A$  im Sachzusammenhang.*

(3 + 4 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

- b) (1) Berechnen Sie die Verteilung, die nach diesem Modell im Jahr 2015 zu erwarten ist.  
(2) Bestimmen Sie die Verteilung, die nach diesem Modell im Jahr 2012 vorgelegen hätte.  
(3) Ein Biologe behauptet, dass weniger als 15 % aller Welpen mindestens ein Alter von drei Jahren erreichen.

Prüfen Sie, ob nach der obigen Modellierung mit der Matrix  $A$  die Behauptung des Biologen zutrifft.

(3 + 5 + 4 Punkte)

- c) Wölfe, die in einem Tierpark leben, haben andere Überlebens- und Fortpflanzungsraten. Für einen Tierpark kann die Entwicklung seiner Wolfspopulation durch die folgende Matrix  $B$  modelliert werden:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & d \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,7 \end{pmatrix}$$

- (1) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Einträge in der zweiten Spalte der Matrix  $B$  im Vergleich zu den Einträgen in der zweiten Spalte der Matrix  $A$ .  
(2) Wegen der räumlichen Beschränkung will die Tierparkleitung die Gesamtzahl der Wölfe konstant halten. Das soll durch eine strikte Geburtenkontrolle gewährleistet werden.

Zeigen Sie, dass nur für den Wert  $d = 0,1$  eine von  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  verschiedene stationäre

Verteilung existiert, d. h. eine Verteilung, die sich innerhalb eines Jahres nicht ändert.

- (3) Ermitteln Sie für den Wert  $d = 0,1$  die kleinstmögliche Gesamtpopulation mit stationärer Verteilung  $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit natürlichen Zahlen  $n_1, n_2$  und  $n_3$ .

(2 + 7 + 4 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

d) Für die Population in dem obigen Tierpark wird eine neue Modellierung gewählt: Die Entwicklungsstufe der Welpen wird mit der Überlebensrate von 80 % beibehalten, die Entwicklungsstufen der jungen Fähen und ausgewachsenen Fähen werden zu einer Stufe zusammengefasst. Die neue Modellierung soll durch die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & g \\ 0,8 & h \end{pmatrix}$$

mit  $g > 0$  und  $0 \leq h < 1$  dargestellt werden. Die Population der Welpen und Fähen soll mit insgesamt 19 Tieren konstant bleiben.

- (1) Zeigen Sie, dass in dem neuen Modell eine stationäre Verteilung mit mehr als 10 Welpen nicht vorkommen kann.
- (2) Ermitteln Sie die Einträge  $g$  und  $h$  in der Matrix  $C$  so, dass sich eine stationäre Verteilung mit 5 Welpen und 14 Fähen ergibt.

(3) Mit den Werten aus (2) ist  $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{14} \\ 0,8 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$ . Ein Taschenrechner liefert z. B.

$$C^{17} = \begin{pmatrix} 0,2222222218 & 0,2777777779 \\ 0,6222222226 & 0,7777777777 \end{pmatrix}.$$

Die Potenzen  $C^n$  der Matrix  $C$  streben mit wachsendem  $n$  gegen eine Matrix  $G$ .

Ermitteln Sie die exakten Werte der Einträge von  $G$  aus den Ansätzen

$$G \cdot C = G \text{ und } G \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

(8 + 3 + 7 Punkte)

### Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung