6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Von 65 Welpen im Jahr 2013 entwickeln sich im folgenden Jahr 26 zu jungen Fähen, also ist $b = 0{,}4$.

(2) Von den jungen Fähen erreichen 50 % das dritte Lebensjahr und von den ausgewachsenen Fähen erreichen 60 % das nächste Lebensjahr. Eine junge Fähe bringt im Durchschnitt 1,5 Welpen zur Welt und eine ausgewachsene Fähe durchschnittlich zwei Welpen.

Teilaufgabe b)

(1) $$\begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 52 \\ 26 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 20{,}8 \\ 22{,}6 \end{pmatrix}.$$

Im Jahr 2015 sind 71 Welpen, 21 junge Fähen und 23 ausgewachsene Fähen zu erwarten.

(2) $$\begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ j \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 1{,}5 \cdot j + 2 \cdot a & = & 65 \\ 0{,}4 \cdot w & = & 8 \\ 0{,}5 \cdot j + 0{,}6 \cdot a & = & 20 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 0{,}2 \cdot a & = & 5 \\ 0{,}4 \cdot w & = & 8 \\ 0{,}5 \cdot j + 0{,}6 \cdot a & = & 20 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} w & = & 20 \\ j & = & 10 \\ a & = & 25 \end{array} \right|.$$

Für das Jahr 2012 hätte sich eine Verteilung von 20 Welpen, 10 jungen und 25 ausgewachsenen Fähen ergeben.

(3) Der Anteil q der Welpen, die mindestens drei Jahre werden, beträgt $q = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}12 = 12\,\% < 15\,\%$. Damit ergibt sich die Behauptung des Biologen aus der Modellierung.

Teilaufgabe c)

(1) Die Überlebensrate für die jungen Fähen steigt von 0,5 auf 0,75 und ihre Fortpflanzungsrate fällt von 1,5 auf 1.

(2) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & d \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ j \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ j \\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} j + d \cdot a & = & w \\ 0{,}8 \cdot w & = & j \\ 0{,}75 \cdot j + 0{,}7 \cdot a & = & a \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} -w + j + d \cdot a & = & 0 \\ 0{,}8 \cdot w - j & = & 0 \\ 0{,}75 \cdot j - 0{,}3 \cdot a & = & 0 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} -w + j + d \cdot a & = & 0 \\ -0{,}2 \cdot j + 0{,}8 \cdot d \cdot a & = & 0 \\ (3 \cdot d - 0{,}3) \cdot a & = & 0 \end{array} \right| .$$

Nur für $d = 0{,}1$ gibt es die vom Nullvektor verschiedene Lösung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot a \\ 0{,}4 \cdot a \\ a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$.

Für $d \neq 0{,}1$ folgt aus der 3. Gleichung $a = 0$ und schließlich $w = j = 0$.

(3) Die kleinstmögliche Population ergibt sich aus $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ mit 19 Tieren.

Teilaufgabe d)

(1) Es ist $\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0{,}8 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ 19 - w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ 19 - w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} g \cdot (19 - w) & = & w \\ 0{,}8 \cdot w + h \cdot (19 - w) & = & 19 - w \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} g & = & \dfrac{w}{19 - w} \\ h & = & \dfrac{19 - 1{,}8 \cdot w}{19 - w} \end{array} \right| .$

(Für $w = 19$ folgt der Widerspruch $w = 0$. Also kann bei der Auflösung $w \neq 19$ vorausgesetzt werden.)

Die Bedingung $g > 0$ erfordert zunächst $w < 19$. (Das ergibt sich auch aus dem Sachzusammenhang.)

Die Bedingung $0 \leq h < 1$ erfordert $0 < w < 11$. Nur für $w < 11$ ist die Überlebensrate h der Fähen positiv.

(2) Einsetzen von $w = 5$ in die Lösungen des obigen Gleichungssystems ergibt $g = \frac{5}{14}$ und $h = \frac{5}{7}$. Unabhängig davon lassen sich g und h aus $\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0{,}8 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$ bestimmen.

(3) $$\begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{14} \\ 0{,}8 & \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot y & \frac{5}{14} \cdot x + \frac{5}{7} \cdot y \\ 0{,}8 \cdot z & \frac{5}{14} \cdot u + \frac{5}{7} \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} x & = & 0{,}8 \cdot y \\ y & = & \frac{5}{14} \cdot x + \frac{5}{7} \cdot y \\ u & = & 0{,}8 \cdot z \\ z & = & \frac{5}{14} \cdot u + \frac{5}{7} \cdot z \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} x & = & 0{,}8 \cdot y \\ u & = & 0{,}8 \cdot z \end{array} \right|.$$

Weiterhin ist $\begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 5 \cdot x + 14 \cdot y & = & 5 \\ 5 \cdot u + 14 \cdot z & = & 14 \end{array} \right|$ und somit, wegen $x = 0{,}8 \cdot y$ bzw. $u = 0{,}8 \cdot z$, $y = \frac{5}{18}$ bzw. $z = \frac{7}{9}$. Insgesamt erhalten wir als Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{28}{45} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$