Name: ____________________

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Eine Firma stellt mit zwei verschiedenen Maschinen A und B Bodenfliesen aus Keramik her. Damit eine Fliese als „1. Wahl" gilt, muss sie strenge Qualitätsnormen erfüllen. Alle anderen Fliesen werden als „2. Wahl" bezeichnet. Eine Fliese, die mit Maschine A produziert wurde, ist erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 „1. Wahl" (d. h. mit der Wahrscheinlichkeit von 0,1 „2. Wahl"). Maschine B produziert lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 „1. Wahl"-Fliesen. Dabei kann für beide Maschinen davon ausgegangen werden, dass die Produktion von Fliesen 1. und 2. Wahl jeweils stochastisch unabhängig erfolgt. Fliesen, die von Maschine A produziert wurden, werden im Folgenden als A-Fliesen bezeichnet, Fliesen von Maschine B als B-Fliesen. Jede Packung enthält 20 Fliesen, die von derselben Maschine stammen.

a) (1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung A-Fliesen genau zwei „2. Wahl"-Fliesen enthalten sind.*

(2) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung A-Fliesen maximal 80 % der Fliesen die Qualität „1. Wahl" haben.*

Die 20 Fliesen einer Packung B-Fliesen wurden in 4 Reihen mit jeweils 5 Fliesen verlegt.

(3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\tilde{p}$ dafür, dass eine zufällig ausgewählte Reihe nur „1. Wahl"-Fliesen enthält.* [Kontrollergebnis $\tilde{p} = 0,32768$]

(4) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mindestens eine Reihe gibt, die nur „1. Wahl"-Fliesen enthält.*

(2 + 3 + 2 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) An Großabnehmer verkauft die Firma auch Paletten, die jeweils 500 Packungen Fliesen von derselben Maschine enthalten. Ein Bauunternehmer bestellt eine Palette mit A-Fliesen. Da die Packungen bei der Lieferung nicht gekennzeichnet sind, befürchtet er, versehentlich eine Palette mit B-Fliesen erhalten zu haben.

Er beschließt, für einen Test der Lieferung zufällig 100 Fliesen zu entnehmen und die Anzahl X der „2. Wahl"-Fliesen in dieser Stichprobe zu bestimmen.

(1) *Begründen Sie, dass X als binomialverteilte Zufallsgröße aufgefasst werden kann, wobei die Trefferwahrscheinlichkeit bei A-Fliesen $p = 0{,}1$ und bei B-Fliesen $p = 0{,}2$ beträgt.*

(2) Es wird ein Hypothesentest mit der Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}2$ durchgeführt. Wird H_0 verworfen, wird die Palette angenommen, sonst wird sie zurückgeschickt.

Erklären Sie die Wahl der Nullhypothese.

(3) *Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel (auf Basis der genannten Nullhypothese) für die oben genannte Stichprobe von 100 Fliesen mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit (d. h. Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art) von höchstens 5 %.*
[Zur Kontrolle: H_0 wird für $X \leq 13$ abgelehnt.]

(4) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_A, dass die Hypothese H_0 aufgrund der Entscheidungsregel aus (3) irrtümlich nicht abgelehnt wird, obwohl die Palette tatsächlich A-Fliesen enthält, also $p = 0{,}1$ gilt.*

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_B, dass die Hypothese H_0 irrtümlich abgelehnt wird, obwohl die Palette tatsächlich B-Fliesen enthält, also $p = 0{,}2$ gilt.
[Zur Kontrolle: $p_A \approx 0{,}1239$, $p_B \approx 0{,}0469$]

(5) Im Lager des Herstellers befanden sich 7 Paletten mit A-Fliesen und 3 Paletten mit B-Fliesen, aus denen die angelieferte Palette zufällig ausgewählt wurde.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten p_A und p_B die gesamte Irrtumswahrscheinlichkeit für den Test.

(3 + 4 + 5 + 6 + 4 Punkte)

Name: ____________________

c) Für besonders anspruchsvolle Kunden soll eine Sorte „Premium“ angeboten werden, die nur aus „1. Wahl“-Fliesen besteht.
Dazu will die Firma die „2. Wahl“-Fliesen aus der **Produktion der Maschine A** aussortieren. Für einen ersten Sortiervorgang wird ein Testgerät verwendet, das allerdings nicht immer optimal funktioniert:
Das Testgerät erkennt eine „2. Wahl“-Fliese mit einer Wahrscheinlichkeit von $w = 0,8$ („Aussortierwahrscheinlichkeit“) und sortiert sie aus. Andererseits wird eine „1. Wahl“-Fliese mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 zu Unrecht als „2. Wahl“ aussortiert.

(1) *Stellen Sie die Situation graphisch dar (mit einer Vierfeldertafel oder einem Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten).*
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit der das Testgerät eine zufällig ausgewählte Fliese als „1. Wahl“ einstuft (also nicht aussortiert).

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Fliese, die bei der Prüfung nicht aussortiert wurde, in Wirklichkeit eine „2. Wahl“-Fliese ist.*

(3) *Bestimmen Sie, wie groß die „Aussortierwahrscheinlichkeit“ w des Testgeräts mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit aus (2) (und damit der erwartete Anteil der „2. Wahl“-Fliesen nach dem Aussortieren) durch die Prüfung auf unter 1 % gesenkt wird.*

(7 + 4 + 6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$	$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X) \approx 0{,}95$
	$P(X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$	$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X) \approx 0{,}975$
	$P(X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}975$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$	$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X) \approx 0{,}995$
	$P(X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}995$

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1\sigma \le X) \approx 0{,}841$
	$P(X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}841$
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 2\sigma \le X) \approx 0{,}977$
	$P(X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}977$
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 3\sigma \le X) \approx 0{,}999$
	$P(X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}999$

Name: ______________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k)=B(n;p;0)+\ldots+B(n;p;k)=\binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0}+\ldots+\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

						p						
n	*k*	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8								0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15									0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
						p						

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000 (für $n = 10$)

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000 (für $n = 20$)

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilungen für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,05	0,07	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3	0,4		*n*
	0	0,0059	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,0371	0,0060	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,1183	0,0258	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,2578	0,0744	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,4360	0,1632	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,6160	0,2914	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,7660	0,4443	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,8720	0,5988	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9369	0,7340	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9	0,9718	0,8380	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10	0,9885	0,9092	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11	0,9957	0,9531	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12	0,9985	0,9776	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13	0,9995	0,9901	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14	0,9999	0,9959	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15		0,9984	0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0033	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16		0,9994	0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0068	0,0010	0,0001	0,0000	83	
	17		0,9998	0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0133	0,0022	0,0002	0,0000	82	
	18		0,9999	0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0243	0,0045	0,0005	0,0000	81	
	19			0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0420	0,0089	0,0011	0,0000	80	
	20			0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0684	0,0165	0,0024	0,0000	79	
	21			0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,1057	0,0288	0,0048	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,1552	0,0479	0,0091	0,0001	77	
	23				0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,2172	0,0755	0,0164	0,0003	76	
	24				0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,2909	0,1136	0,0281	0,0006	75	
	25				0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,3737	0,1631	0,0458	0,0012	74	
	26				0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,4620	0,2244	0,0715	0,0024	73	
	27				0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,5516	0,2964	0,1066	0,0046	72	
	28				0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,6379	0,3768	0,1524	0,0084	71	
	29				0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,7172	0,4623	0,2093	0,0148	70	
100	30					0,9997	0,9939	0,8962	0,7866	0,5491	0,2766	0,0248	69	100
	31					0,9999	0,9969	0,9307	0,8446	0,6331	0,3525	0,0398	68	
	32						0,9984	0,9554	0,8909	0,7107	0,4344	0,0615	67	
	33						0,9993	0,9724	0,9261	0,7793	0,5188	0,0913	66	
	34						0,9997	0,9836	0,9518	0,8371	0,6019	0,1303	65	
	35						0,9999	0,9906	0,9697	0,8839	0,6803	0,1795	64	
	36						0,9999	0,9948	0,9817	0,9201	0,7511	0,2386	63	
	37							0,9973	0,9893	0,9470	0,8123	0,3068	62	
	38							0,9986	0,9940	0,9660	0,8630	0,3822	61	
	39							0,9993	0,9968	0,9790	0,9034	0,4621	60	
	40							0,9997	0,9983	0,9875	0,9341	0,5433	59	
	41							0,9999	0,9992	0,9928	0,9566	0,6225	58	
	42							0,9999	0,9996	0,9960	0,9724	0,6967	57	
	43								0,9998	0,9979	0,9831	0,7635	56	
	44								0,9999	0,9989	0,9900	0,8211	55	
	45									0,9995	0,9943	0,8689	54	
	46									0,9997	0,9969	0,9070	53	
	47									0,9999	0,9983	0,9362	52	
	48									0,9999	0,9991	0,9577	51	
	49										0,9996	0,9729	50	
	50										0,9998	0,9832	49	
	51										0,9999	0,9900	48	
	52											0,9942	47	
	53											0,9968	46	
	54			Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9983	45	
	55											0,9991	44	
	56											0,9996	43	
	57											0,9998	42	
	58											0,9999	41	
n		0,95	0,93	0,9	0,85	5/6	0,8 (*p*)	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	*k*	*n*

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \geq 0,5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 4: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,\ldots$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2{,}32) = 0{,}9898$

$\phi(-0{,}9) = 1 - \phi(0{,}9) = 0{,}1841$

$\phi(z) = 0{,}994 \Rightarrow z = 2{,}51$