6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

Man betrachtet die Zufallsgröße X: Anzahl der „2. Wahl"-Fliesen in einer Packung A-Fliesen. X ist binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,1$ und dem Stichprobenumfang $n = 20$.

(1) $P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{18} \approx 0,2852 = 28,52\,\%$

(2) Sind maximal 80 % der Fliesen „1. Wahl", so müssen mindestens 4 Fliesen „2. Wahl" sein.
$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,133$

(3) Die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer Reihe mit B-Fliesen nur „1. Wahl"-Fliesen befinden, beträgt $\tilde{p} = 0,8^5 = 0,32768$.

(4) Man betrachtet die Zufallsgröße Y: „Anzahl der Reihen, die nur „1. Wahl"-Fliesen enthalten". Y ist binomialverteilt mit dem Stichprobenumfang $n = 4$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $\tilde{p} = 0,8^5$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt dann

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - \tilde{p})^4 = 1 - (1 - 0,8^5)^4 \approx 0,7957 = 79,57\,\%$.

Teilaufgabe b)

(1) Da alle Fliesen auf der Palette von derselben Maschine produziert wurden, enthält diese entweder ausschließlich *A*-Fliesen oder ausschließlich *B*-Fliesen.
Jede Fliese ist demnach mit derselben Wahrscheinlichkeit „2. Wahl", nämlich entweder mit $p = 0{,}1$ (*A*-Fliese) oder $p = 0{,}2$ (*B*-Fliese).
Die Qualität jeder Fliese ist stochastisch unabhängig von der der anderen Fliesen; denn die laufende Produktion der beiden Maschinen erzeugt stochastisch unabhängig Fliesen „1. Wahl" oder „2. Wahl".

(2) Es soll ausgeschlossen werden, irrtümlich eine Palette mit *B*-Fliesen anzunehmen. Daher wird man die H_1-Hypothese $H_1 : p < 0{,}2$ und somit die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}2$ wählen. Die Wahl der Hypothese H_0 deutet darauf hin, dass man jede Kiste als tatsächlich von Maschine A stammend akzeptieren möchte, bei der der Anteil von „2. Wahl"-Fliesen signifikant unter 20 % liegt.

(3) *X* ist nach (1) binomialverteilt mit einer Trefferwahrscheinlichkeit p, wobei $p \in \{0{,}1; 0{,}2\}$ gilt.
Aufgrund der Aufgabenstellung und der Hypothesenwahl soll für die kritische Grenze k die Aussage $P_p(X \leq k) \leq 0{,}05$ für alle $p \geq 0{,}2$ gelten. Für $p = 0{,}2$ erhält man $k = 13$.

[Hinweis für Lehrkräfte: Die zugehörige Operationscharakteristik ist monoton fallend.]

Man erhält somit als Entscheidungsregel: H_0 wird abgelehnt, wenn $X \leq 13$ ist.

[Alternative: Nimmt man die Gültigkeit der Hypothese H_0 mit $p = 0{,}2$ an, so ist *X* binomialverteilt mit $n = 100$, $p = 0{,}2$. Bei Gültigkeit von H_0 ist $\mu = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ und

$\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$.

Also ist die Laplace-Bedingung erfüllt und wegen der σ-Regel
$0{,}95 \approx P(X > \mu - 1{,}64\sigma)$ und $\mu - 1{,}64\sigma = 20 - 1{,}64 \cdot 4 = 13{,}44$ erhält man die zuvor genannte Entscheidungsregel.]

(4) Es gilt $p_A = P_{p=0{,}1}(X > 13) = 1 - P_{p=0{,}1}(X \leq 13) = 1 - 0{,}8761 \approx 0{,}1239$

und $p_B = P_{p=0{,}2}(X \leq 13) \approx 0{,}0469$.

(5) Es ist $P(Irrtum) = 0{,}7 \cdot p_A + 0{,}3 \cdot p_B \approx 0{,}1008$.

Teilaufgabe c)

Definiere folgende Ereignisse:

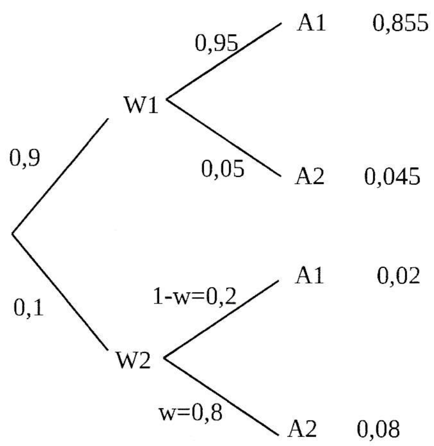
W1: Die Fliese ist „1. Wahl“.

W2: Die Fliese ist „2. Wahl“.

A1: Die Fliese wird als „1. Wahl“ angezeigt.

A2: Die Fliese wird als „2. Wahl“ angezeigt.

(1)



Alternative:

	A1	A2	Summe
W1	0,855	0,045	0,9
W2	0,02	0,08	0,1
Summe	0,875	0,125	1

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt: $P_1 = P(A1) = 0,855 + 0,02 = 0,875$.

(2) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$P_{A1}(W2) = \frac{P(A1 \cap W2)}{P(A1)} = \frac{0,02}{0,875} = \frac{4}{175} \approx 0,0229 = 2,29\ \%.$$

(3) Mit allgemeinem w bestimmt man die Wahrscheinlichkeit aus (2) so:

$$P_{A1}(W2) = \frac{P(A1 \cap W2)}{P(A1)} = \frac{(1-w)\cdot 0{,}1}{(1-w)\cdot 0{,}1 + 0{,}855}.$$

Um diese unter 1 % = 0,01 zu senken, bestimmt man w mit folgendem Ansatz:

$$\frac{(1-w)\cdot 0{,}1}{(1-w)\cdot 0{,}1 + 0{,}855} < 0{,}01 \Leftrightarrow (1-w)\cdot 0{,}1 < 0{,}01\cdot\left((1-w)\cdot 0{,}1 + 0{,}855\right)$$

$$\Leftrightarrow (1-w)\cdot 0{,}1 < 0{,}001\cdot(1-w) + 0{,}00855$$

$$\Leftrightarrow 0{,}099\cdot(1-w) < 0{,}00855$$

$$\Leftrightarrow 1-w < \frac{0{,}00855}{0{,}099}$$

$$\Leftrightarrow w > 1 - \frac{0{,}00855}{0{,}099} = \frac{201}{220}.$$

Die in der Aufgabenstellung genannte Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Wahrscheinlichkeit w größer als $\frac{201}{220} \approx 0{,}9136$ ist.