# 6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile "Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

#### Teilaufgabe a)

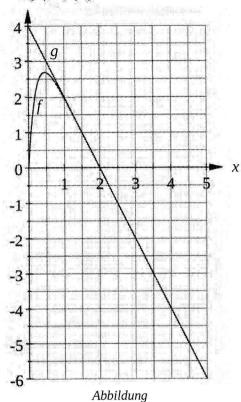
- (1) Es ist f(0) = 0. Daher schneidet der Graph der Funktion f die y-Achse im Punkt  $S_{v}(0|0)$ .
- (2) Man berechnet  $f'(x) = -2 + 20 \cdot e^{-5x}$ . Hieraus ergibt sich  $f''(x) = -100 \cdot e^{-5x}$ . Notwendig für eine Extremstelle  $x_E$  ist  $f'(x_E) = 0$ . Nun gilt:  $-2 + 20 \cdot e^{-5x_E} = 0 \Leftrightarrow e^{-5x_E} = 0, 1 \Leftrightarrow e^{5x_E} = 10 \Leftrightarrow 5x_E = \ln(10) \Leftrightarrow x_E = 0, 2 \cdot \ln(10)$ . Wegen  $f''(x_E) = -10 < 0$  wird an der Stelle  $x_E = 0, 2 \cdot \ln(10)$  ein lokales Maximum angenommen.

### Teilaufgabe b)

- (1) Wegen  $f''(x) = -100 \cdot e^{-5x} < 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist die Funktion f' streng monoton fallend.
- (2) Da die Funktion f' streng monoton fallend ist und  $f'(x_E) = 0$  gilt  $(x_E)$  ist die Extremstelle von f aus a) (2)), erhält man: Für  $x < x_E$  ist f'(x) > 0 und für  $x > x_E$  ist f'(x) < 0. [Alternativ kann man mit  $f'(x) = -2 + 20 \cdot e^{-5x}$  argumentieren.] Somit ist die Funktion f für  $x < x_E$  streng monoton steigend und für  $x > x_E$  streng monoton fallend.
- (3) Jede streng monotone Funktion besitzt höchstens eine Nullstelle. Da die Funktion *f* zwei Monotoniebereiche hat, besitzt sie höchstens zwei Nullstellen.

# Teilaufgabe c)

(1) f(x), g(x)



- (2) Es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ :  $g(x) > f(x) \Leftrightarrow g(x) f(x) > 0 \Leftrightarrow 4 \cdot e^{-5x} > 0$ . Hieraus folgt die Behauptung.
- (3) Nach c) (2) ist  $f(x_0) < g(x_0)$ . Wegen  $f(x_0) = 0$  erhält man  $g(x_0) = 4 2x_0 > 0$ . Also ist  $x_0 < 2$ .

[Alternative: Nach c) (2) verläuft der Graph der Funktion f unterhalb der Geraden g. Da g fällt und die x-Achse an der Stelle  $x_1 = 2$  schneidet, folgt die Behauptung.]

(4) Es sei A der Inhalt der in der Aufgabenstellung beschriebenen Fläche. Wegen c) (2) erhält man  $A = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 4 \cdot e^{-5x} dx = \left[ -0.8 \cdot e^{-5x} \right]_0^1 = 0.8 - 0.8 \cdot e^{-5} \approx 0.8$  [FE].

### Teilaufgabe d)

- (1) Wegen  $f(5) = -6 4 \cdot e^{-25} \approx -6$  wurde der Ball etwa 6 m über dem Boden abgeworfen.
- (2) Da f(0) = 0 und  $f(5) = -6 4 \cdot e^{-25} \approx -6$ , hat der Ball bei  $x_E$  die maximale Höhe. Die maximale Höhe des Balles über dem Boden beträgt  $f(x_E) + |f(5)| = 3,6 0,4 \cdot \ln(10) + 6 + 4 \cdot e^{-25} \approx 8,68 \text{ [m]}.$
- (3) Der Ball startet auf der Höhe des Fensters von ca. 6 m über dem Boden und muss diese Höhe dann beim Fallen auf den Boden wieder passieren. Offensichtlich ist f(0) = 0. Damit ist  $x_{01} = 0,00$  eine Nullstelle der Funktion f. Wegen  $f(2) \approx -0,00018$ ,  $f(1,9) \approx 0,2$ ,  $f(1,99) \approx 0,02$ ,  $f(1,999) \approx 0,002$  ist  $x_{02} \approx 2,00$  die zweite Nullstelle der Funktion f.
- (4) Da die Funktion f' streng monoton fallend ist, liegen die Extrema am Rand des Zeitintervalls und es ist f'(0) = 18 das Maximum und  $f'(5) = -2 + 20 \cdot e^{-25} \approx -2$  das Minimum der Funktion f' im Zeitintervall [0;5].

  Interpretation: Der Ball kann Geschwindigkeiten zwischen 18 m/s und -2 m/s annehmen. Dabei bedeutet eine negative Geschwindigkeit, dass der Ball fällt.

  [Alternative: Die maximale Steiggeschwindigkeit beträgt 18 [m/s] und die maximale Sinkgeschwindigkeit 2 [m/s]].