

## 6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

### Teilaufgabe a)

Die Zufallsgröße  $X$ : „Anzahl der ausgewählten Jugendlichen, die „Freundschaftsbuch“ nutzen“ kann als binomialverteilt angenommen werden mit  $p = 0,3$  und  $n = 100$ .

(1)  $P(X = 33) \approx 0,069$ .

(2)  $P(X \leq 25) \approx 0,163$ .

(3) Da der Erwartungswert  $\mu = 100 \cdot 0,3 = 30$  ist, wird die Wahrscheinlichkeit für  $25 \leq X \leq 35$  gesucht. Es ist

$$P(25 \leq X \leq 35) = P(X \leq 35) - P(X \leq 24) \approx 0,884 - 0,114 = 0,770.$$

### Teilaufgabe b)

Die Zufallsgröße  $X$ : „Anzahl der ausgewählten Jugendlichen, die „Freundschaftsbuch“ nutzen“ kann weiterhin als binomialverteilt angenommen werden mit  $p = 0,3$  und unbekanntem  $n$ .

Dann ist  $n$  so zu bestimmen, dass  $P(X \geq 1) \geq 0,99$  gilt:

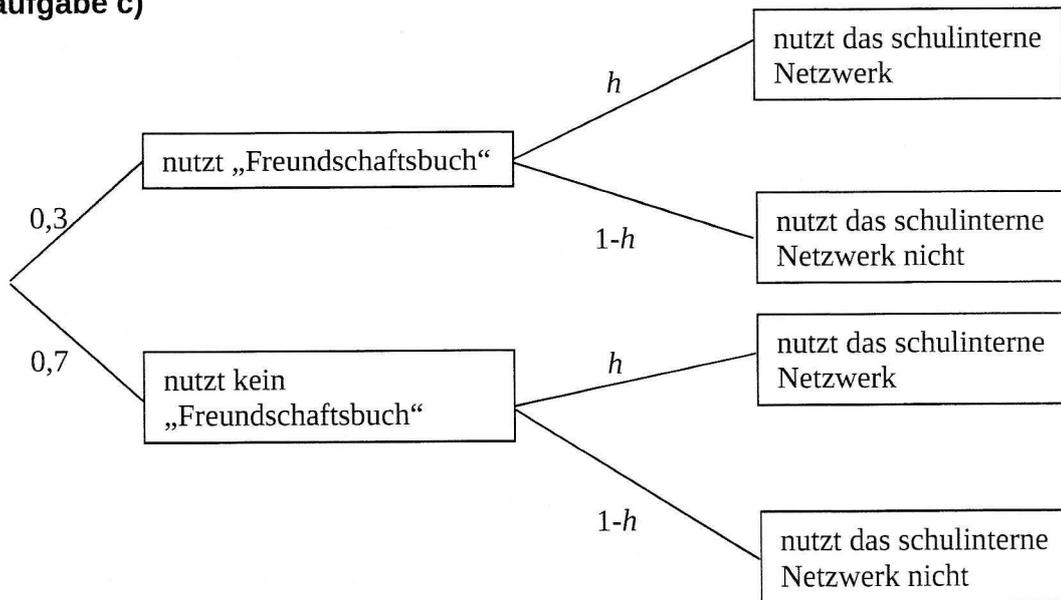
$$P(X \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,99 \Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow 0,7^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq 12,91.$$

Es müssen also mindestens 13 Jugendliche ausgewählt werden.

**Teilaufgabe c)**

(1)



oder

| Eine jugendliche Person nutzt ... | „Freundschaftsbuch“ | „Freundschaftsbuch“ nicht | Summe |
|-----------------------------------|---------------------|---------------------------|-------|
| das schulinterne Netzwerk         | $0,3h$              | $0,7h$                    | $h$   |
| das schulinterne Netzwerk nicht   | $0,3(1-h)$          | $0,7(1-h)$                | $1-h$ |
| Summe                             | $0,3$               | $0,7$                     | $1$   |

(2) Den Anteil derjenigen, die „Freundschaftsbuch“ nutzen, aber nicht das schulinterne Netzwerk, kann man mit Hilfe des Terms  $0,3 \cdot (1-h)$  angeben (Pfadregel). Der Anteil derjenigen, die „Freundschaftsbuch“ nicht nutzen, dafür aber das schulinterne Netzwerk, kann mit Hilfe des Terms  $0,7h$  angegeben werden (Pfadregel). Damit ist der Anteil derjenigen, die genau eines der beiden Netzwerke nutzen, die Summe der beiden Terme.

(3) Es ist also  $0,3 \cdot (1-h) + 0,7h = 0,4 \Leftrightarrow h = 0,25$ .

(4) Es ist

$$\begin{aligned}
 &P(\text{"nutzt mindestens eines der beiden Netzwerke"}) \\
 &= P(\text{"nutzt genau eines der beiden Netzwerke"}) + P(\text{"nutzt beide Netzwerke"}) \\
 &= 0,4 + 0,075 = 0,475.
 \end{aligned}$$

- (5) Der Anteil derjenigen, die das schulinterne Netzwerk nutzen, beträgt  $h = 0,25$ , während der Anteil derjenigen, die das schulinterne Netzwerk, nicht aber „Freundschaftsbuch“ nutzen, bei  $0,7h = 0,175$  liegt. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte jugendliche Person, die das schulinterne Netzwerk nutzt, „Freundschaftsbuch“ nicht nutzt:

$$P_{\text{nutzt das schulinterne Netzwerk}} ("nutzt Freundschaftsbuch nicht") = \frac{0,7h}{h} = \frac{0,175}{0,25} = 0,7.$$

[Eine Argumentation mit der stochastischen Unabhängigkeit ist ebenfalls denkbar.]

### Teilaufgabe d)

- (1) Mit der Wahl von  $H_0 : p \leq 0,25$  als Nullhypothese kann die Vermutung entsprechend überprüft werden. Dabei kann die Zufallsgröße  $X$ : „Anzahl der Nutzer des schulinterne Netzwerks“ als binomialverteilt angenommen werden.

Bei Verwendung der Tabelle oder eines geeigneten Taschenrechners erhält man

$$P_{p=0,25}(18 \leq X) = 1 - P_{p=0,25}(X \leq 17) \approx 0,055 > 0,05 \text{ und}$$

$$P_{p=0,25}(19 \leq X) = 1 - P_{p=0,25}(X \leq 18) \approx 0,029 < 0,05.$$

Als Entscheidungsregel ergibt sich in diesem Fall:

Verwirf die Nullhypothese, falls  $X \geq 19$ , also 19 oder mehr Jugendliche der Umfrage das schulinterne Netzwerk nutzen.

[Alternative: Es ist  $\mu = 50 \cdot 0,25 = 12,5$  und  $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0,25 \cdot 0,75} \approx 3,062 > 3$ , womit die Laplace-Bedingung erfüllt ist. Es gilt also  $P(X < \mu + 1,64\sigma) \approx 0,95$ .

Als Grenze ergibt sich  $\mu + 1,64\sigma \approx 12,5 + 1,64 \cdot 3,062 \approx 17,522$  und somit lautet die Entscheidungsregel:

Verwirf die Nullhypothese, falls  $X \geq 18$ , also 18 oder mehr Jugendliche der Umfrage das schulinterne Netzwerk nutzen. (Diese Lösung wird ebenfalls akzeptiert, obwohl in diesem Fall das Signifikanzniveau nicht eingehalten wird.)]

- (2) Im Fall  $X = 19$  ist die Nullhypothese zu verwerfen. Die Schülervvertretung bewertet ihre Aktionen also als gelungen.

- (3) Macht die Schülersvertretung den Fehler 1. Art, so ist die Bewertung der Situation auf Grund der Umfrage falsch. Man kann die Nullhypothese, dass sich die Anzahl der Nutzer des schulinternen Netzwerks nicht erhöht hat, nicht verwerfen. Die Bewertung der Aktionen als gelungen ist somit falsch.
- (4) Macht die Schülersvertretung den Fehler 2. Art, so verwirft sie aufgrund der Umfrage die Nullhypothese nicht und bewertet ihre Aktionen als nicht gelungen, und das, obwohl sich die Anzahl der Nutzer des schulinternen Netzwerks erhöht hat. Liegt der Nutzungsgrad in Wirklichkeit bei 40 %, so liegt die Auftretswahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art mit  $p = 0,4$ ,  $n = 50$  und gegebener Grenze bei 19 [bzw. 18] bei

$$\beta = P_{p=0,4}(X \leq 18) \approx 0,336 \text{ [bzw. } \beta = P_{p=0,4}(X \leq 17) \approx 0,237 \text{ ].}$$