

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

$$(1) \text{ Aus } \overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ folgt, dass } |\overrightarrow{LM}| = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \approx 8,25 \text{ [LE]}$$

ist. Daher ist das Dreieck LMN gleichschenkelig.

$$(2) \text{ Da } |\overrightarrow{LM}| = |\overrightarrow{MN}| \text{ ist, kann im Dreieck } LMN \text{ ein rechter Winkel höchstens im Punkt } M \text{ sein.}$$

$$\text{Da } \overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0 \text{ gilt, ist das Dreieck } LMN \text{ nicht rechtwinklig.}$$

[Alternativ kann beispielsweise auch mit dem Satz des Pythagoras argumentiert werden.]

$$(3) \text{ Der Punkt } R(4 | 4 | 3) \text{ ist der Mittelpunkt der Strecke } \overline{LN}. \text{ Da das Dreieck } LMN$$

gleichschenkelig ist, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks $A_{\Delta LMN} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{LN}| \cdot |\overrightarrow{RM}|$.

$$\text{Aus } \overrightarrow{LN} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{RM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ folgt, dass } |\overrightarrow{LN}| = \sqrt{144} = 12 \text{ [LE] und}$$

$$|\overrightarrow{RM}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ [LE] ist.}$$

$$A_{\Delta LMN} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \approx 33,94 \text{ [FE].}$$

Teilaufgabe b)

(1) Für eine Gleichung der Ebene H in Parameterform ergibt sich:

$$H: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \overrightarrow{LM} + s \cdot \overrightarrow{LN} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ Es folgt:}$$

$$H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (r^*, s^*, r, s \in \mathbb{R})$$

$$\text{bzw. } \begin{cases} x_1 = 8 - 2s \\ x_2 = 4r + 2s \\ x_3 = 1 + r + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 2s \\ x_2 - 4x_3 = -4 - 2s \\ x_3 = 1 + r + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \\ x_2 - 4x_3 = -4 - 2s \\ x_3 = 1 + r + s \end{cases}.$$

Es ergibt sich als mögliche Koordinatenform:

$$H: x_1 - x_2 + 4x_3 = 12.$$

$$(2) g: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + t \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OD}) \text{ bzw. } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t^*, t \in \mathbb{R}).$$

$P(8+t | -t | 8+4t)$ ($t \in \mathbb{R}$) ist ein beliebiger Punkt auf der Geraden g . P ist genau dann Schnittpunkt von g und H , wenn gilt:

$$8+t - (-t) + 4 \cdot (8+4t) = 12 \Leftrightarrow 18t + 40 = 12 \Leftrightarrow t = -\frac{14}{9}.$$

Eingesetzt in g erhält man den Schnittpunkt $S\left(\frac{58}{9} \mid \frac{14}{9} \mid \frac{16}{9}\right)$.

(3) Die Gerade g schneidet die Ebene H genau dann senkrecht, wenn ein Richtungsvektor von g zu zwei nicht-kollinearen Richtungsvektoren von H senkrecht steht.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ist z. B. ein Richtungsvektor von } g. \text{ Da } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ ist,}$$

schneidet g die Ebene H senkrecht.

- (4) Da die Gerade g die Ebene H senkrecht schneidet, gilt für die Höhe der Pyramide $LMND$:

$$h = |\overline{SD}| = \left| \begin{pmatrix} 14/9 \\ -14/9 \\ 56/9 \end{pmatrix} \right| = \frac{14}{9} \cdot \sqrt{18} = \frac{14}{3} \cdot \sqrt{2} \text{ [LE]}.$$

Für das Volumen der Pyramide $LMND$ folgt mit a) (3):

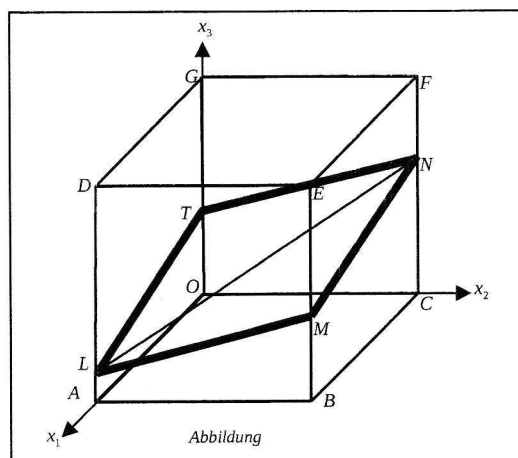
$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_{\Delta LMN} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{2} \cdot \frac{14}{3} \sqrt{2} = \frac{224}{3} = 74,6 \text{ [VE]}.$$

Teilaufgabe c)

- (1) $T(x_1 | x_2 | x_3)$ ist genau dann der Schnittpunkt der x_3 -Achse mit der Ebene H , wenn

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \wedge x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \text{ gilt. Es folgt: } T(0 | 0 | 3).$$

(2)



[Hinweis: In Aufgabenteil c) (2) ist auch eine „rein“ grafische Lösung mit Parallelen vorstellbar.]

- (3) Aus $\overline{LM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{MN} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (siehe auch a) (1), $\overline{NT} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overline{TL} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ folgt,

dass alle Seiten des Schnittbildes gleich lang sind. Da außerdem die Punkte L, M, N und T in einer Ebene $[H]$ liegen, ist das Schnittgebilde eine Raute.

- (4) Setzt man die Koordinaten von D in die „linke Seite“ der Koordinatengleichung von H ein, so erhält man $40 (>12)$. Ein Punkt $U(u | v | w)$ liegt genau dann auf derselben Seite der Ebene H (im selben Halbraum wie D), wenn ebenfalls $u - v + 4w > 12$ ist. Da $2,5 - 1 + 4 \cdot 2,75 = 12,5 > 12$ ist, liegt auch Q auf derselben Seite von H wie D .