Binomialverteilung

- Woher? Was ? Wozu? -

Webinar mit Andreas Erb

17.02.2016 / 20 Uhr

Wahrscheinlichkeit

- Münzwurf
- Sportwetten
- Lottogewinn
- Wettervorhersage
- Unwetterschäden
- Börse

Wichtige Begriffe

- Zufall
- Zufallsexperiment
- Ergebnis
- Ergebnismenge
- Zufallsvariable
- Ereignis
- Ereignisraum

Wahrscheinlichkeitsfunktion

- Ordnet einem Ereignis (A) eine Wahrscheinlichkeit (P) zu
- Eigenschaften:
  - Wertebereich zwischen 0 und 1
  - Summe aller Werte ist 1
- Dichtefunktion bei stetigen Werten
- Verteilungsfunktion als Summe / Integral

Anzahl der Möglichkeiten

- Ist mit ausschlaggebend für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines bestimmten Ereignisses bzw. Ergebnisses

Laplace-Experiment

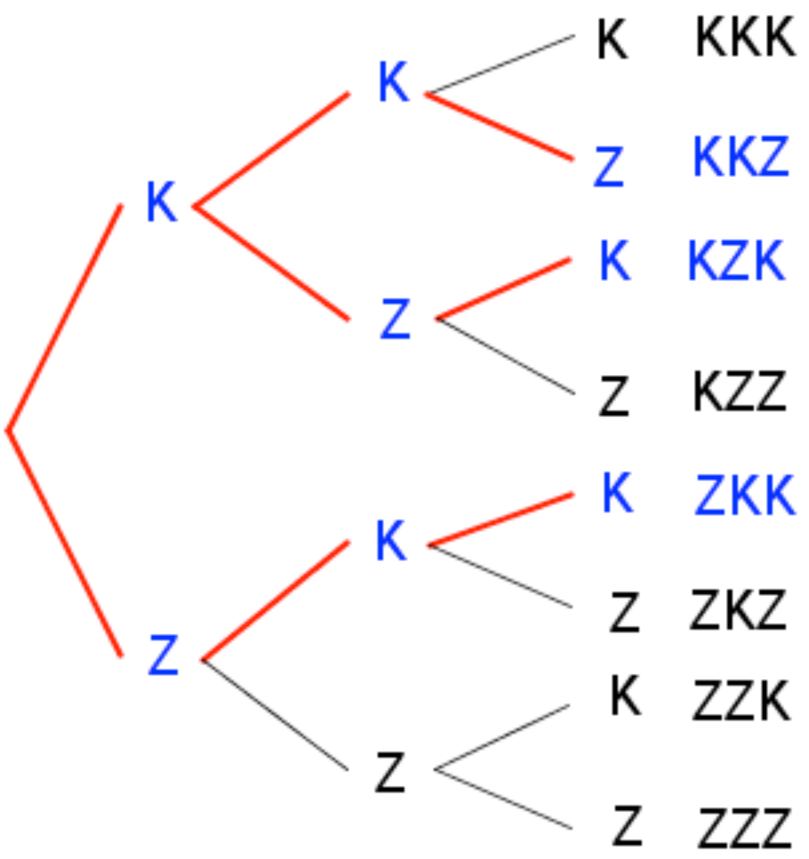
- Eigenschaften
- Mehrstufige Laplace-Experimente
- Das Baumdiagramm

Baumdiagramm

Beispiel:

Dreimaliger

Münzwurf



Bernoulli-Experiment

- Eigenschaften
  - Zwei mögliche Ausgänge (Erfolg – Misserfolg)
- Bedingungen
  - Keine weiteren Ausgänge möglich
  - P(E) + P(M) = 1
  - Keine Änderung der Ausgangsbedingungen (entspricht Ziehung mit Zurücklegen)
- Annäherung
  - Bei sehr großen Ausgangszahlen

Bernoulli-Kette

- Wichtige Begriffe
  - p: Erfolgswahrscheinlichkeit
  - n: Länge der Bernoulli-Kette

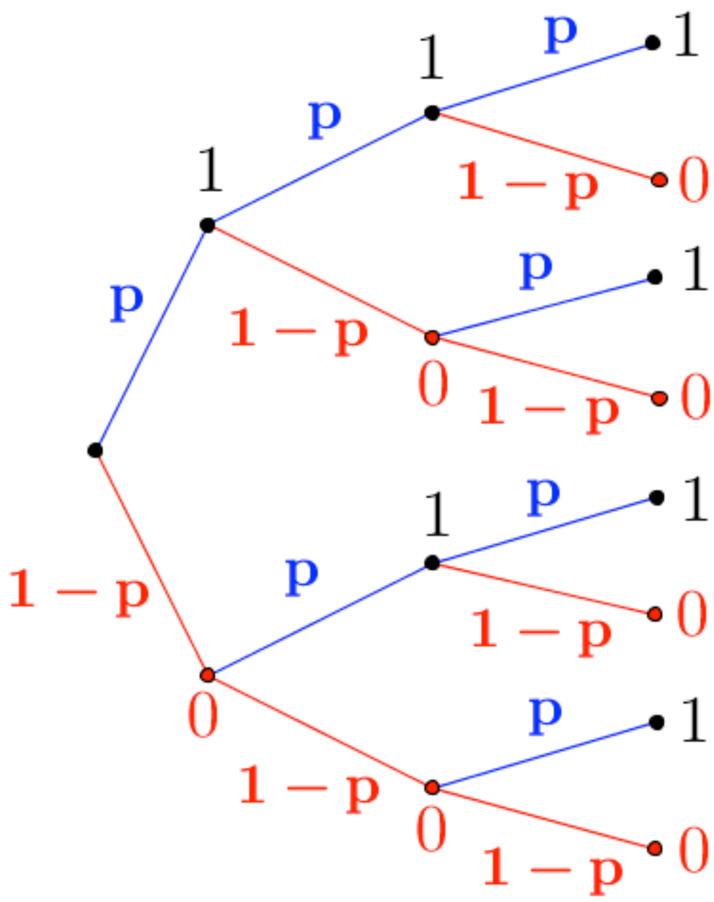
Ein Glücksrad mit 5 gleichen, mit A bis E beschrifteten, Feldern wird viermal gedreht. Es wird jeweils notiert ob ein B gedreht wurde. Bestimmen Sie die Länge n und die Erfolgswahrscheinlichkeit p dieser Bernoulli-Kette.

Bernoulli-Kette (Beispiele)

Entscheiden Sie, bei welchen der folgenden mehrstufigen Zufallsexperimente, es sich um eine Bernoulli-Kette handelt.

- [ ] Wiederholtes Werfen einer Münze.
- [ ] Ein Würfel wird wiederholt geworfen. Es wird jeweils notiert, ob eine 1 geworfen wurde.
- [ ] Ein Glücksrad mit 3 verschiedenfarbigen Feldern. Es wird jeweils die erdrehte Farbe notiert.
- [ ] Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit blauen und weißen Kugeln.

Baumdiagramm Bernoulli-Kette



Anzahl der Möglichkeiten

- Der Binomialkoeffizient

Die Anzahl dieser Pfade kann man mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ bestimmen. Dieser gibt nämlich an, auf wie viele Arten man die k Erfolge auf die n Stufen der Bernoulli-Kette verteilen kann.

Formel von Bernoulli

Es ergibt sich insgesamt: Ist X die Anzahl der Erfolge bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und Erfolgswahrscheinlichkeit p, dann ist

$$\mathbf{b_{n;p}(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$ **(Bernoulli-Formel)**

die Wahrscheinlichkeit genau k Erfolge zu erzielen und

$$\mathbf{B_{n;p}(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}}$$

die Wahrscheinlichkeit höchstens k Erfolge zu erzielen.

Binomialverteilung

- Eine Zufallsgröße X, die die Werte $0,1,2,\ldots,n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X=k)=b_{n;p}(k)$ annimmt, heißt **binomialverteilt.**

Beispiel

Bei einer Lotterie sind 10 % der Lose Gewinnlose.

- Jemand kauft drei Lose.
  Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mindestens zwei Gewinnlose?
- Wie viele Lose hätte man mindestens kaufen müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose über 50 % liegt?

Lösung

Beispiel

Ein Reißnagel wird mehrfach geworfen. Dabei fällt er erfahrungsgemäß in 60 % der Würfe auf den Kopf, ansonsten auf die Seite.

- Geben Sie Ereignisse A, B, C und D an, für deren Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$P(A)=\binom{30}{20}\cdot 0{,}6^{20}\cdot 0{,}4^{10};\qquad P(C)=\binom{8}{7}\cdot 0{,}6^{7}\cdot 0{,}4+0{,}6^{8};$$

$$P(B)=\binom{10}{0}\cdot 0{,}6^{0}\cdot 0{,}4^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0{,}6^{1}\cdot 0{,}4^{9};\qquad P(D)=\binom{25}{10}\cdot 0{,}4^{10}\cdot 0{,}6^{15}.$$

Lösung

Beispiel

Ein Medikament heilt eine bestimmte Krankheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 %. Eine Gruppe von 100 erkrankten Patienten erhält das Medikament.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden
  - höchstens 80
  - mindestens 40 und höchstens 90,
  - mindestens 85

  Patienten dieser Gruppe geheilt?

Lösung

Beispiel

Eine Firma stellt Speicherchips her, die mit der Wahrscheinlichkeit p intakt sind.

a) Man geht nach Erfahrungswerten von $p = 0,95$ aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Packung mit 50 Chips mehr als einen defekten Speicherchip?

b) Nach einer Optimierung der Produktion versichert die Firma, dass mit einer Wahr- scheinlichkeit von mindestens 60 % in einer Packung mit 50 Chips alle intakt sind. Wie groß ist p dann mindestens?

Lösung

Noch Fragen?