Lineare Gleichungssysteme

Webinar – 26.01.2016

Allgemeines

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 12 \\
5x_1 + 6x_2 + 6x_3 &= -14 \\
-15x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -49
\end{aligned}
$$

LGS lösen

Als Lösung eines Gleichungssystems der Form

$$
\begin{aligned}
a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 &= d_1 \\
a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= d_2 \\
a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 &= d_3
\end{aligned}
$$

bezeichnen wir die Werte für x_1, x_2 und x_3, für die alle Gleichungen erfüllt sind.

LGS lösen

- Ein Beispiel:

$$\begin{aligned} 4x_1 \quad +2x_2+7x_3 &= 21 \\ 2x_2+3x_3 &= 1 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Ein Beispiel

Es sind folgende Gleichungen gegeben:

I $16a + 4b + c = 4$

II $48a + 2b = 0$

III $4a + 2b = 11$

Noch ein Beispiel

Folgende drei Gleichungen sind gegeben:

I $32a+16b+8c=3$

II $80a+32b+12c=0{,}5$

III $160a+48b+12c=0$

Finde den Fehler!

I	$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5$
II	$x_1 - 7x_2 + 12x_3 = -8$
III	$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4$
I	$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5$
II	$x_1 - 7x_2 + 12x_3 = -8$
IIIa = III − I	$2x_2 + x_3 = 4$

I	$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4$
II	$6x_1 + 2x_2 + x_3 = -8$
III	$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4$
I	$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4$
IIa = II + (−2)·I	$-x_3 = -16$
III	$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4$

Lösungsmöglichkeiten

Ein lineares Gleichungssystem hat entweder

eine eindeutige Lösung	**keine Lösung**	**unendlich viele Lösungen**
Das erkennt man am Gleichungssystem (manchmal erst nach Umformung) daran, dass		
alles ok ist	ein Widerspruch steht (z.B. $3=0$)	etwas unbestimmtes übrig bleibt (z.B. $x_1+2x_2=2$)
Beispiele für jede Form finden sich genug!		

Anwendungen

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 &= -21 \end{aligned}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Wie lassen sich ein solches Gleichungssystem und seine eindeutige Lösung geometrisch deuten?

Vektoren

Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

Geraden und Ebenen

Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad E: 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11.$$

Prüfen Sie nach, ob der Punkt $A(3|0|2)$ auf der Geraden g liegt.
Zeigen Sie: Die Gerade g ist orthogonal zur Ebene E.
Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes der Ebene E, welcher vom Punkt A den kleinsten Abstand hat.

Knobelei

Die Quersumme einer Zahl dreiziffrigen Zahl ist gleich dem Dreifachen der ersten Ziffer. Die Summe der ersten und dritten Zahl ist gleich der zweiten Ziffer. Die zweite und die dritte Ziffer ergeben zusammen 8. Bestimmen Sie die Zahl.

„Mischungen“

Eine Versandbuchhandlung bietet vor den Sommerferien im Internet eine Sonderaktion an: drei Pakete Taschenbücher zum Urlaubsschmökern. Die Bücher stammen aus den drei beliebten Reihen des Versandhauses: Kriminalromane, Science-Fiction Bücher und Abenteuerromane. Alle Bücher aus einer Reihe haben jeweils den gleichen Preis.

Im ersten Paket sind 3 Krimis, 3 Science-Fiction Bücher und 5 Abenteuerromane.
Eine andere Zusammenstellung enthält 4 Krimis, 3 Science-Fiction Bücher und 2 Abenteuerromane.
Eine dritte Auswahl umfasst 5 Krimis, 2 Science-Fiction-Bücher und 3 Abenteuerromane.

Die Buchhandlung will mit dieser Aktion ihr Lager räumen, nachdem eine Inventur ergeben hat, dass noch 2580 Krimis, 1770 Science-Fiction Bücher und 2080 Abenteuerromane vorhanden sind.

„Mischungen“