

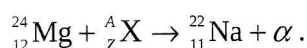
6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Sollte die Auswertung der Messdaten mit Hilfe eines grafikfähigen TR oder CAS erfolgen, so muss der Prüfling die entstandenen Graphen für die korrigierende Lehrkraft skizzenhaft in seiner Reinschrift dokumentieren.

Teilaufgabe 1: Die Herstellung des Isotops ^{22}Na

Die Kernumwandlungsgleichung mit dem zunächst unbekannten Nuklid ^A_ZX ist gegeben:



Beim Alpha-Teilchen handelt es sich um ^4_2He , also lautet die ergänzte Kernumwandlungsgleichung: $^{24}_{12}\text{Mg} + ^A_Z\text{X} \rightarrow ^{22}_{11}\text{Na} + ^4_2\text{He}$.

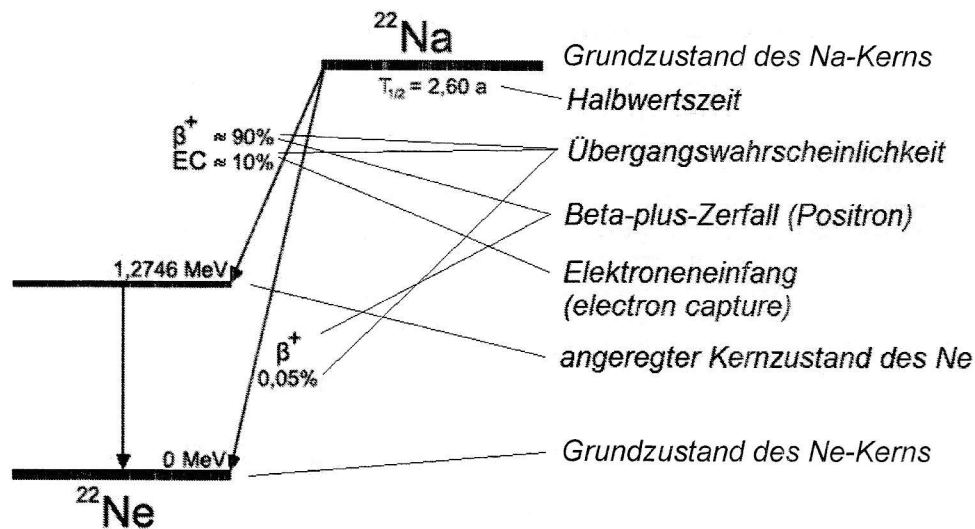
Da bei dem Produkt $^{22}_{11}\text{Na} + ^4_2\text{He}$ insgesamt 26 Nukleonen mit 13 Protonen vorhanden sind, bleiben als Differenz zum $^{24}_{12}\text{Mg}$ insgesamt 2 Nukleonen, von denen genau eines ein Proton ist. Also handelt es sich bei dem beschleunigten Teilchen um den Kern des schweren Wasserstoffatoms, also um das Deuteron ^2_1H .

Hinweis für die korrigierende Lehrkraft:

Andere Bezeichnungen für das Deuteron (z. B. ^2_1d) sind ebenfalls zugelassen.

Teilaufgabe 2: Der Zerfall des ^{22}Na

a) Die Informationsangaben im Termschema bedeuten:



Das Energiestufenschema zeigt, dass durch zwei verschiedene Prozesse, nämlich einerseits durch einen β^+ -Zerfall sowie andererseits durch Elektroneneinfang, mit einer insgesamt fast 100-prozentigen Wahrscheinlichkeit ein angeregter Kern des Folgekerns ^{22}Ne entsteht, der sich 1,2746 MeV über dem Grundzustand des ^{22}Ne befindet. Der angeregte ^{22}Ne -Kern geht anschließend durch Aussenden eines Gamma-Quants in seinen Grundzustand über.

Nur sehr selten geht das ^{22}Na durch β^+ -Zerfall direkt in den Grundzustand des ^{22}Ne über.

- b) Bei der Umwandlung des ^{22}Na durch β^+ -Zerfall wandelt sich ein Kernproton in ein Neutron und ein Positron um.

Hinweis für die korrigierende Lehrkraft:

Das ebenfalls entstehende Neutrino braucht nicht erwähnt zu werden.

- c) Kernumwandlungsgleichung: $^{22}_{11}\text{Na} \rightarrow ^{22}_{10}\text{Ne} + ^0_1e^+$.

Hinweis für die korrigierende Lehrkraft:

Das ebenfalls entstehende Neutrino braucht nicht erwähnt zu werden.

Teilaufgabe 3: Energiebetrachtungen für den Zerfall des ^{22}Na

a) Gegeben sind $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ sowie $\Delta m = m_{\text{Na}} - m_{\text{Ne}} = 21,9884 \text{ u} - 21,9859 \text{ u}$

mit $u = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

$$\text{Damit ergibt sich } \Delta E = \Delta m \cdot c^2 = (21,9884 \text{ u} - 21,9859 \text{ u}) \cdot \left(2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2,$$

$$\text{also } \Delta E \approx 3,7 \cdot 10^{-13} \text{ J} \approx 2,3 \cdot 10^6 \text{ eV} = 2,3 \text{ MeV}.$$

Hinweis für die korrigierende Lehrkraft:

Die Genauigkeit wird hier – genau genommen – durch die Differenz

$\Delta m = m_{\text{Na}} - m_{\text{Ne}} = 0,0025 \text{ u}$ auf zwei Stellen begrenzt. Rechnen die Prüflinge mit diesem so gerundeten Zwischenwert weiter, so ergibt sich

$$\Delta E \approx 3,8 \cdot 10^{-13} \text{ J} \approx 2,4 \cdot 10^6 \text{ eV} = 2,4 \text{ MeV}.$$

Eine – in Maßen – abweichende Anzahl gültiger Ziffern durch die Prüflinge, ggf. auch durch die Verwendung von in ihren Taschenrechnern einprogrammierten physikalischen Konstanten (höherer relevanter Stellenzahl), sollte in angemessenem Rahmen akzeptiert werden. So ergibt sich beispielsweise bei der Berechnung mit der vollen Genauigkeit der einprogrammierten Konstanten eines bestimmten Taschenrechners:

$$\Delta E = 3,73 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 2,33 \cdot 10^6 \text{ eV} = 2,33 \text{ MeV}.$$

Entsprechendes gilt auch für die weiteren Zahlenwertrechnungen in folgenden Teilaufgaben.

b) Bei der Berechnung der maximalen für das Positron zur Verfügung stehenden kinetischen

Energie $\Delta E_{\text{kin max}}$ muss die Ruheenergie des Positrons $E_{0e^+} = m_{0e^+} \cdot c^2 = 511 \text{ keV}$ berücksichtig

sichtigt werden, also:

$$\Delta E_{\text{kin max}} = \Delta E - E_{\gamma} - E_{0e^+}$$

$$\Delta E_{\text{kin max}} = 2,3 \text{ MeV} - 1,275 \text{ MeV} - 0,511 \text{ MeV} \approx 0,5 \text{ MeV}.$$

c) Ein möglicher Grund dafür, dass der in Teilaufgabe b) angesprochene maximale Wert der kinetischen Energie des Positrons nicht ganz erreicht wird, besteht darin, dass der Rückstoß des Kerns (und damit dessen kinetische Energie) bei der Rechnung in Teilaufgabe b) unberücksichtigt geblieben ist.

- d) • *Berechnung von $v_{\max}$:*

$$v_{\max} = \sqrt{1 - \left(\frac{511 \text{ keV}}{0,5 \text{ MeV} + 511 \text{ keV}} \right)^2} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,6 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- *Vergleich mit klassischer Rechnung:*

Nach klassischer Rechnung erhält man aus $E_{\text{kin max}} = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v_{\text{max nichtrel}}^2$ die maximale Geschwindigkeit

$$v_{\text{max klassisch}} = \sqrt{2 \cdot \frac{E_{\text{kin max}}}{m_0}} = c \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{E_{\text{kin max}}}{m_0 \cdot c^2}} = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{0,5 \text{ MeV}}{511 \text{ keV}}} \approx 4,2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

- *Vergleich der beiden Ergebnisse:*

Der Vergleich der beiden so bestimmten Geschwindigkeiten zeigt, dass sich bei klassischer Rechnung eine Geschwindigkeit oberhalb der Lichtgeschwindigkeit ergibt, was physikalisch nicht möglich ist. Der Wert der Geschwindigkeit gemäß der zu verwendenden Gleichung bleibt hingegen unterhalb von dem der Lichtgeschwindigkeit.

Teilaufgabe 4: Das Positron des ^{22}Na

- a) Die Gesamtenergie der beiden Gamma-Quanten ist gleich der Summe der Ruheenergien von Positron und Elektron, die wegen der Massengleichheit von Positron und Elektron gleich der doppelten Ruheenergie des Positrons (oder des Elektrons) ist:

$$E_{2\gamma} = E_{0e^+} + E_{0e^-} = m_{0e^+} \cdot c^2 + m_{0e^+} \cdot c^2 = (m_{0e^+} + m_{0e^+}) \cdot c^2 = 2 \cdot m_{0e^+} \cdot c^2$$

$$E_{2\gamma} = 2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 1,02 \text{ MeV}.$$

- b) Unmittelbar vor der Annihilation ist der Gesamtimpuls von Positron und Elektron praktisch Null, da beide als in Ruhe betrachtet werden dürfen. Aufgrund des Impulserhaltungssatzes muss auch nach der Annihilation der Gesamtimpuls Null bleiben. Das wäre aber nicht gegeben, wenn nach der Annihilation lediglich ein einzelnes Gamma-Quant vorhanden wäre.

c) Aus Abbildung 2 liest man unmittelbar ab:

$$E_{\gamma A} \approx 520 \text{ keV}$$

$$E_{\gamma B} \approx 1280 \text{ keV}$$

Ursache für $E_{\gamma A}$: Es handelt sich um die Energie der Annihilations-Gamma-Quanten.

Ursache für $E_{\gamma B}$: Es handelt sich um die Energie derjenigen Gamma-Quanten, die entstehen, wenn der dem β^+ -Zerfall des ^{22}Na folgende angeregte Kern des ^{22}Ne in seinen Grundzustand übergeht, wie dies in Abbildung 1 erkennbar ist.

Teilaufgabe 5: Positronium

a) Da die Masse des (H-Atom-) Elektrons nur ca. $1/1836$ der Masse des (H-Kern-)Protons beträgt, liefert der exakte Term praktisch die gleichen Energiewerte wie der (übliche, vereinfachte) Term für die Energieniveaus im H-Atom. Rechnerisch ergibt sich für den

Korrekturfaktor: $\frac{m_p}{m_p + m_e} = 0,9995$, also in guter Näherung $\frac{m_p}{m_p + m_e} \approx 1$.

Hinweis für die korrigierende Lehrkraft:

Siehe Bemerkung zu Teilaufgabe 3a).

b) Bei Berücksichtigung der gleichen Massen $m_{e^-} = m_{e^+}$ erhält man als Korrekturfaktor für

das Elektron im Positronium: $\frac{m_{e^+}}{m_{e^+} + m_{e^-}} = \frac{1}{2}$. Der Vergleich der beiden Termschemata

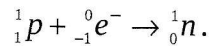
zeigt also, dass sich für das Elektron des Positroniums halb so große Werte ergeben wie für das Elektron des Wasserstoffatoms.

Teilaufgabe 6: Umwandlung des ^{22}Na durch Elektroneneinfang

a) Beschreibung des Vorgangs:

Beim Einfang eines Hüllen-Elektrons wandelt sich ein Kern-Proton durch Aufnahme des Hüllen-Elektrons in ein Neutron um.

Umwandlungsgleichung:

**Hinweis für die korrigierende Lehrkraft:**

Die volle Punktzahl kann vom Prüfling nur bei vollständiger Angabe der Kennzahlen für p , e und n erreicht werden.

b) Beschreibung der Vorgänge:

In der Atomhülle wird der frei werdende Energiezustand des vom Kern aufgenommenen ehemaligen Hüllen-Elektrons durch ein anderes Elektron höheren Energiezustands eingenommen.

Entstehung von Röntgenstrahlung:

Das nachrückende Hüllen-Elektron gibt die entsprechende Energiedifferenz, die meist im keV-Bereich liegt, in Form von Gamma-Strahlung ab. Ggf. erfolgen mehrstufige Nachrückungen.