

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Spalte „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Sollte die Auswertung der Messdaten mit Hilfe eines grafikfähigen TR oder CAS erfolgen, so muss der Prüfling die entstandenen Graphen für die korrigierende Lehrkraft skizzenhaft in seiner Reinschrift dokumentieren.

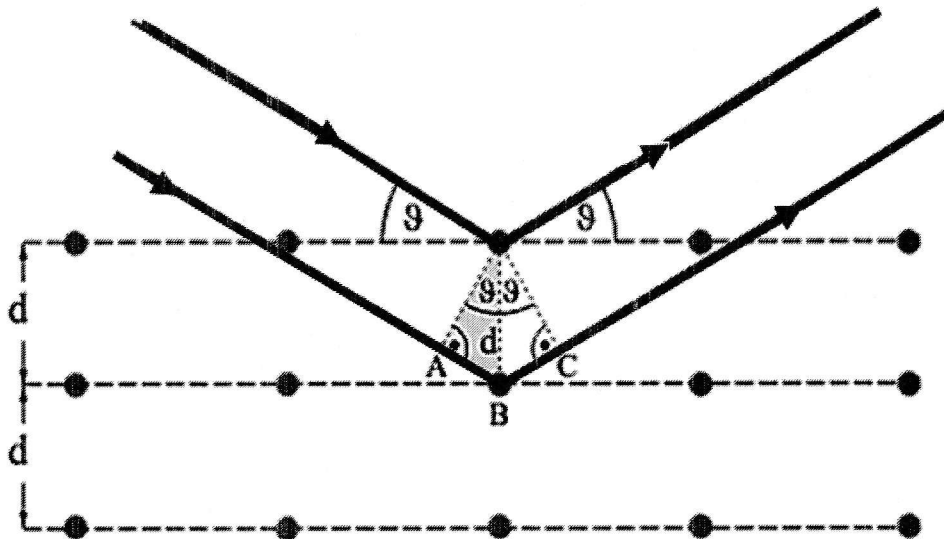
Teilaufgabe 1

- a) Für den Gangunterschied zwischen den beiden an der oberen und an der darunter liegenden Netzebene gestreuten Materiewellen gilt:

$$\Delta s = \overline{AB} + \overline{BC} \quad \text{und weiterhin:} \quad \overline{AB} = \overline{BC} = d \cdot \sin(\vartheta).$$

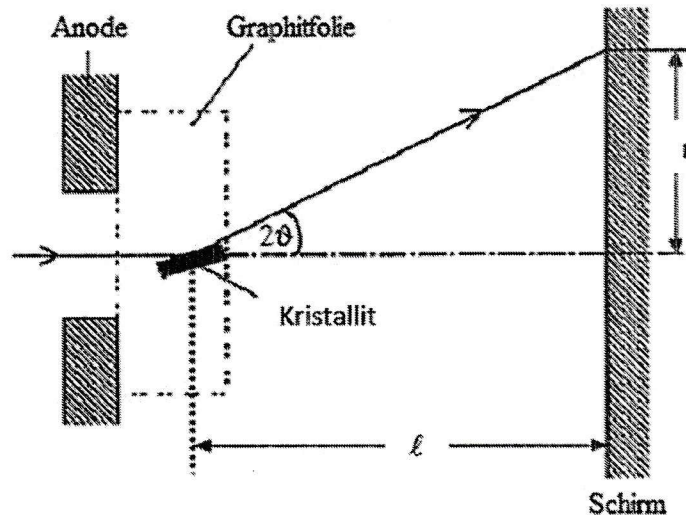
Konstruktive Interferenz tritt auf, wenn für den Gangunterschied Δs gilt: $\Delta s = m \cdot \lambda$

und damit: $2d \cdot \sin(\vartheta_m) = m \cdot \lambda$.



Skizze aus: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/aufgaben#lightbox=/themenbereiche/quantenobjekt-elektron/lb/debye-scherrer-streuung>

- b) Eine polykristalline Probe besteht aus vielen kleinen Kristallen (Kristallite) in allen denkbaren Raumorientierungen. Nur die Kristallite, deren Netzebenen unter den Winkeln ϑ_m getroffen werden führen zur konstruktiven Interferenz, also zur Ausbildung der Maxima. Diese Kristallite liegen rotationssymmetrisch zur Einfallsrichtung der Elektronen, so dass sich ebenfalls ein rotationssymmetrisches Interferenzmuster in Form von Ringen ausbildet.
- c) An der Abbildung erkennt man die folgende Beziehung:



$$2 \cdot \sin(\vartheta) \approx \sin(2 \cdot \vartheta) \approx \tan(2 \cdot \vartheta) = \frac{r}{\ell},$$

weiterhin liefert die Bragg-Gleichung: $2 \cdot \sin(\vartheta_m) = \frac{m \cdot \lambda}{d}$

und damit für $m = 1$: $\frac{r}{\ell} = \frac{\lambda}{d}$.

Der größte Ablenkwinkel $2 \cdot \vartheta_{\max}$ wird am Rand des Leuchtschirms erreicht, also für $r = R$, damit gilt:

$$2 \cdot \vartheta_{\max} = \arcsin\left(\frac{R}{\ell}\right) = 20,7^\circ.$$

- d) Für den Radius eines Interferenzringes gilt die folgende Beziehung: $r = \frac{1}{d} \cdot \ell \cdot \lambda$.

Je größer der Abstand d der Netzebenen ist, desto kleiner ist der Radius r des Interferenzringes, damit führt die Beugung an den Netzebenen mit Abstand $d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ zur Ausbildung des inneren Interferenzringes.

Für den Fall kleiner Beschleunigungsspannungen U_B gilt:

energetischer Ansatz:
$$\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_e^2 = e \cdot U_B$$

$$m_e \cdot v_e = \sqrt{2 \cdot m_e \cdot e \cdot U_B}$$

De-Broglie-Wellenlänge:
$$\lambda = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e \cdot v_e}$$

Einsetzen von $m_e \cdot v_e$ und Auflösen nach U_B liefert
$$U_B = \frac{h^2}{2 \cdot e \cdot m_e \cdot \lambda^2}$$

Der größere Netzebenenabstand $d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ und die größtmögliche Wellenlänge $\lambda_{\max}$ liefern die kleinstmögliche Beschleunigungsspannung $U_{B,\min}$. Diese Wellenlänge führt zur Ausbildung eines Interferenzringes mit Radius $r = R$, so dass für $U_{B,\min}$ gilt:

$$U_{B,\min} = \frac{\ell^2 \cdot h^2}{d_1^2 \cdot R^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot e \cdot m_e} \approx 266 \text{ V}.$$

e) Aus $U_B = \frac{h^2}{2 \cdot e \cdot m_e \cdot \lambda^2}$ und $\frac{r}{\ell} = \frac{\lambda}{d}$ folgt:

$$r = \frac{\ell \cdot h}{d \cdot \sqrt{2 \cdot e \cdot m_e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{U_B}} \text{ und damit } r \sim \frac{1}{\sqrt{U_B}}.$$

Auswertung der Tabelle ergibt:

U_B in kV	3,0	3,5	4,0	4,5
r_1 in mm	14,5	13,0	12,0	11,5
$r_1 \cdot \sqrt{U_B}$ in $\text{m} \cdot \text{V}^{1/2}$	0,79	0,77	0,76	0,77

Man erkennt eine Streuung um einen mittleren Wert und es ist kein eindeutiger Trend erkennbar, damit geben die Messwerte die Proportionalität recht gut wieder.

Hinweis für die korrigierende Lehrkraft:

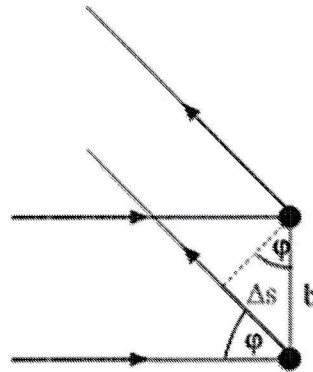
Auch eine graphische Überprüfung der Proportionalität wird als Lösung akzeptiert.

- f) Elektronen können z. B. im Magnetfeld eines Stabmagneten abgelenkt werden, Röntgenstrahlung (Photonen) nicht.

Teilaufgabe 2

- a) Teilchen würden durch die einzelnen Oberflächenatome isotrop gestreut. Auf dem Leuchtschirm wäre keine Struktur erkennbar.
- b) Anhand der Skizze erkennt man folgenden Zusammenhang für den Gangunterschied Δs zweier sich konstruktiv überlagernder Materiewellen: $\sin(\varphi) = \frac{\Delta s}{b}$.

Bei konstruktiver Interferenz gilt zusätzlich: $\Delta s = n \cdot \lambda$ und damit $\sin(\varphi_n) = \frac{n \cdot \lambda}{b}$.



- c) Mit dem Abstand k_n des Maximums nter Ordnung von der optischen Achse gilt:

$$\tan(\varphi_n) = \frac{k_n}{L}, \text{ mit } \sin(\varphi_n) = \frac{n \cdot \lambda}{b} \text{ und } \sin(\varphi_n) \approx \tan(\varphi_n) \text{ folgt: } k_n = \frac{L \cdot \lambda}{b} \cdot n \text{ und damit für}$$

$$\text{die Gitterkonstante } k \text{ des Gitters auf dem Schirm: } k = \frac{L \cdot \lambda}{b}.$$

d) Mit $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e \cdot v_e} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_{\text{kin}}}} = 8,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

und $n = 1$ und $b = \frac{\lambda}{\sin(\alpha_1)}$ folgt: $b = 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.