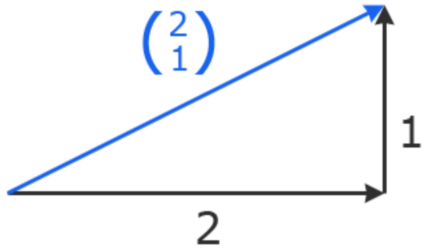
Arbeiten mit Vektoren

- Abstände und Winkel -

Webinar mit Andreas Erb

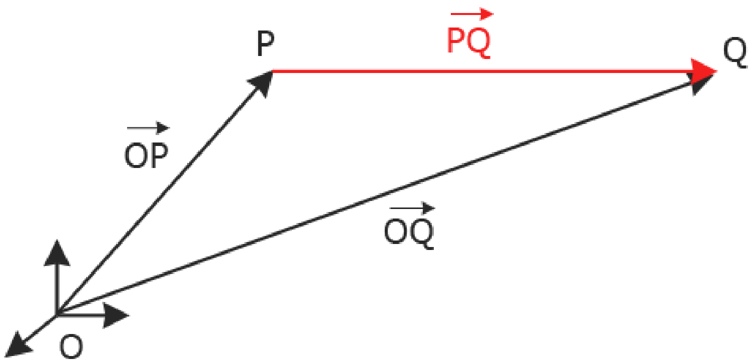
01.02.2016 / 20 Uhr

Vektoren als Verschiebung



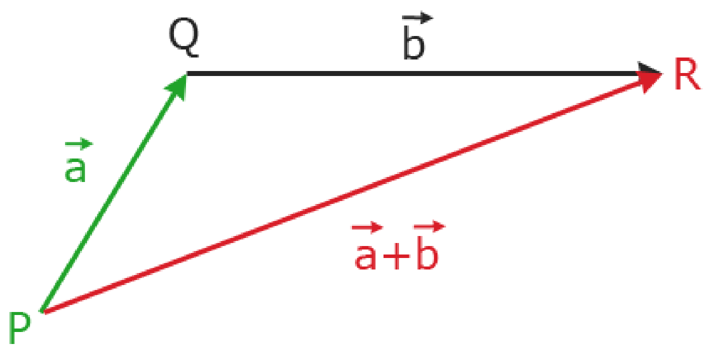
Rechnen mit Vektoren

- Verbindungsvektor zwischen 2 Punkten:



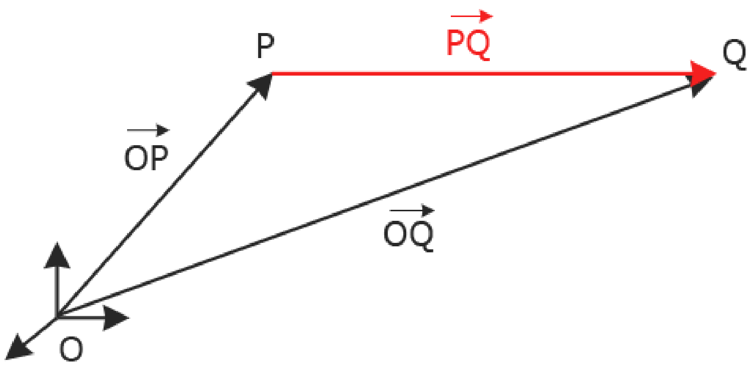
Rechnen mit Vektoren

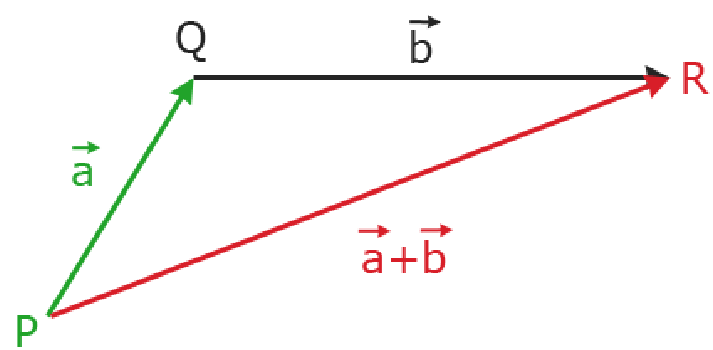
- Addition und Subtraktion



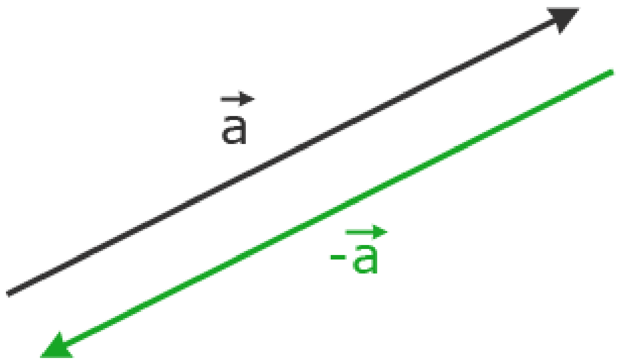
Rechnen mit Vektoren

- Verbindungsvektor zwischen 2 Punkten:



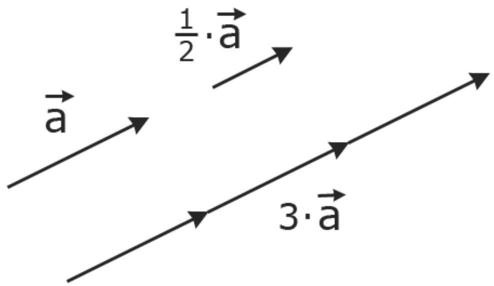


Vektor und Gegenvektor



Rechnen mit Vektoren

- Multiplikation mit einer Zahl



Betrag eines Vektors

- Berechnung:

Der Betrag eines Vektors $\vec{a}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Betrag eines Vektors

- Übungsbeispiel:

Bestimmen Sie den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Abstand zweier Punkte

- Bestimmen Sie den Abstand der Punkte P(1|2|0) und Q(3|-2|4) im Koordinatensystem.

Normierung eines Vektors

Den Betrag eines Vektors bzw. die Länge des zugehörigen Pfeiles ermittelt man durch $|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Ein Vektor $\vec{v}$ heißt **normiert**, wenn er den Betrag 1 hat, also wenn $|\vec{v}| = 1$.

Es gilt: $\overrightarrow{v_0} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} \cdot \vec{v}$.

Normierter Vektor

- Beispielrechnungen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Vektoren

- Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ wird berechnet durch den Term $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Das Skalarprodukt der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ ist

Das Skalarprodukt

- Eigenschaften:

Winkel

Für den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $0 \le \alpha \le 180^\circ$.

Winkel

- Beispielrechnung

Für die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 4 + 2\cdot 0 + 2\cdot 3}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2+3^2}} = \frac{4+0+6}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

und damit ist $\alpha = \cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 48,2^\circ$.

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

- Definition:

Das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

wird berechnet durch $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.

- Eigenschaften:

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

- Beispielrechnung 1:

Finde einen zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonalen Vektor.

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

- Beispielrechnung 2:

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf. Bestimme seinen Flächeninhalt.

Noch Fragen?