6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Die Parabel muss nach unten geöffnet sein und den Scheitelpunkt in $H(0\,|\,5)$ haben.

Ansatz: $y = a \cdot x^2 + 5$. Einsetzen der Koordinaten von $D(-4\,|\,4)$ liefert:

$4 = a \cdot 16 + 5 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{16}$, also die Funktionsgleichung: $y = -\frac{1}{16} \cdot x^2 + 5$.

Zu $x = -2$ gehört der Funktionswert $y = 4{,}75$, in Übereinstimmung mit der y-Koordinate von E.

(2) Die Profillinie hat einen lokalen Hoch- und einen lokalen Tiefpunkt. Dies ist bei quadratischen oder linearen Funktionen nicht möglich.

[Mögliche Alternativen in der Argumentation:

- Die Profillinie wechselt von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung, hat also einen Wendepunkt. Dies ist bei quadratischen oder linearen Funktionen nicht möglich.
- Bei einer ganzrationalen Funktion kann erst ab dem 3. Grad die 1. Ableitung mindestens zwei Nullstellen haben (notwendige Bedingung für die zwei Extremstellen der Funktion).]

Teilaufgabe b)

(1) $f(0) = 5$. (Der Funktionswert stimmt mit der y-Koordinate von H überein.)

$f'(x) = 0{,}0016 \cdot x^3 + 0{,}0048 \cdot x^2 - 0{,}126 \cdot x$.

$f''(x) = 0{,}0048 \cdot x^2 + 0{,}0096 \cdot x - 0{,}126$.

Da $f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$, liegt an der Stelle $x = 0$ tatsächlich ein lokales Maximum von f vor, H ist also lokaler Hochpunkt des Graphen von f.

(2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 7{,}5 \vee x_3 = -10{,}5$.

x_1 ist Maximalstelle, x_3 liegt außerhalb des für die Modellierung relevanten Bereiches.

Da $f(7{,}5) \approx 3{,}4 < f(-4{,}5)$ und $f(7{,}5) < f(10{,}5)$, ist $T(7{,}5\,|\,3{,}4)$ der gesuchte Tiefpunkt.

Die x-Koordinate von T weicht um $\frac{7{,}5-7{,}3}{7{,}3} \approx 2{,}7\,\%$ von der x-Koordinate von Q ab.

Die Abweichung bei der y-Koordinate beträgt $\frac{3{,}4-3{,}3}{3{,}3} \approx 3{,}0\,\%$.

(3) Die Profillinie hat das stärkste Gefälle in einem Wendepunkt zwischen dem Hochpunkt H und dem Tiefpunkt T des Graphen von f.

$f''(x_w) = 0$ hat für $x \geq 0$ die einzige Lösung $x_w = -1 + \sqrt{27{,}25} \approx 4{,}22 \neq 2{,}7$. Also ist A nicht der Punkt mit dem größten Gefälle.

[Alternativ: $f''(2{,}7) \neq 0$, also liegt bei 2,7 kein Wendepunkt vor.]

[Ebenfalls zulässig ist ein Vergleich von $f'(2{,}7)$ mit z. B. $f'(3)$.]

Teilaufgabe c)

(1) Die Länge des Stahlseils entspricht dem Abstand der Punkte $P(6{,}7\,|\,7{,}2)$ und $A(2{,}7\,|\,f(2{,}7))$, wobei $f(2{,}7) \approx 4{,}593$. Den Abstand berechnet man mit dem Satz des Pythagoras: $\left|\overline{AP}\right| = \sqrt{(6{,}7-2{,}7)^2 + (7{,}2-f(2{,}7))^2} \approx 4{,}77$.

Das Stahlseil hat eine Länge von ca. 4,77 m.

(2) Die Steigung der Geraden beträgt $m = \frac{7{,}2-f(2{,}7)}{6{,}7-2{,}7} \approx \frac{7{,}2-4{,}593}{4} \approx 0{,}652$.

Mit $y = f(2{,}7) + m \cdot (x-2{,}7)$ und $f(2{,}7) \approx 4{,}593$ erhält man als Geradengleichung von g: $y = 0{,}652 \cdot x + 2{,}833$.

Mit $m = \tan(\alpha)$ folgt: $\tan(\alpha) \approx 0{,}652 \Rightarrow \alpha \approx 33{,}1°$. g schließt mit der Horizontalen einen Winkel von ungefähr 33,1° ein.

(3) Die Steigung der Geraden durch E und P beträgt $\frac{7{,}2-4{,}75}{6{,}7+2} \approx 0{,}28$, für die Steigung der Tangente an den Graphen von f in E erhält man $f'(-2) \approx 0{,}26$.

Das Seil wird also nicht exakt tangential zur Dachoberkante verlaufen.

[Akzeptiert wird auch z. B.: „nahezu tangential" oder „nicht tangential".]

Teilaufgabe d)

(1) Der Flächeninhalt wird durch Integration ermittelt:

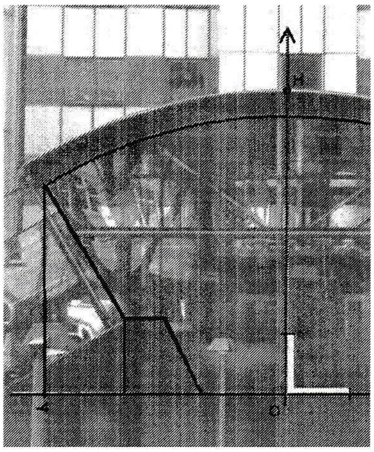
$$\int_0^{7,3} h(x)\,dx = \left[\frac{0,0004}{5}\cdot x^5 + \frac{0,0016}{4}\cdot x^4 - \frac{0,063}{3}\cdot x^3 + 4,5\cdot x\right]_0^{7,3}$$

$$= 0,00008\cdot 7,3^5 + 0,0004\cdot 7,3^4 - 0,021\cdot 7,3^3 + 4,5\cdot 7,3 \approx 27,475.$$

Die Glasfläche ist etwa $27,475\ \text{m}^2$ groß.

(2) Als Lösung wird die Angabe einer geeigneten Ergänzung und Zerlegung mit Angabe des für die Berechnung erforderlichen Integrals und der Formeln für die Teilflächen erwartet.

Der folgende Bildausschnitt zeigt eine mögliche Zerlegung der ergänzten Fläche:



Mit dem Integral $\int_{-4}^{0} h(x)\,dx$ wird der Flächeninhalt zwischen Glasoberkante und x-Achse berechnet. Davon müssen die Flächeninhalte der beiden eingezeichneten Trapeze subtrahiert werden. (Flächeninhalt eines Trapezes: $A = \frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h$.)