



Name: _____

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper $ABCDEFG$ dargestellt werden.

Die obere Etage entspricht dabei der Pyramide $DEFG$, die untere Etage dem Körper $ABCDEF$, der Teil der Pyramide $DEFS$ ist. Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, beschreibt die ebene horizontale Oberfläche des Untergrunds. Das Dreieck DEF liegt parallel zu dieser Ebene.

In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte: $A(-5|5|0)$, $B(-5|25|0)$, $D(0|0|15)$, $E(0|30|15)$, $F(-25|5|15)$ und $G(-10|10|35)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

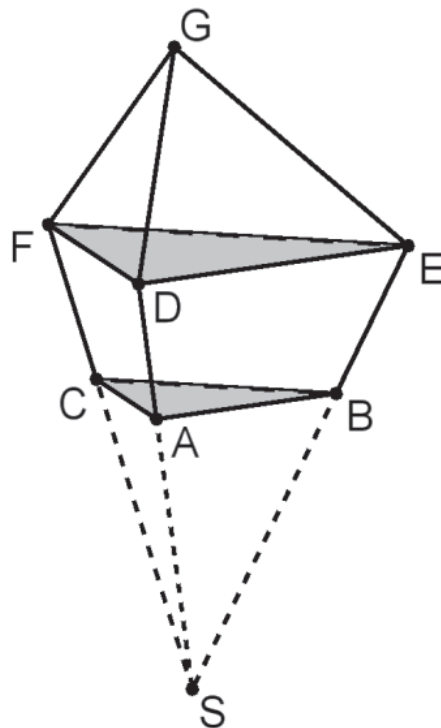


Abbildung 1



Name: _____

- a) Die folgenden Rechnungen zeigen ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der Koordinaten von S:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = s = 3,$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix}, \text{ d. h. } S(-15 | 15 | -30).$$

Erläutern Sie das dargestellte Vorgehen.

(5 Punkte)

- b) (1) Weisen Sie nach, dass die Bodenfläche DEF der oberen Etage nicht rechtwinklig ist.

- (2) Bestimmen Sie für das Dreieck DEF die Größe des Innenwinkels ε bei E.

[Zur Kontrolle: $\varepsilon = 45^\circ$]

- (3) Im Dreieck DEF ist der Punkt P der Fußpunkt der Höhe h auf die Seite \overline{EF} (vgl. Abbildung 2).

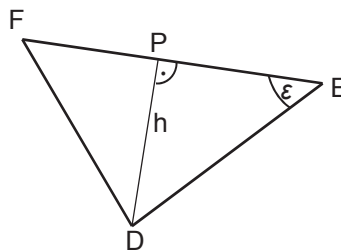


Abbildung 2 [nicht maßstabsgetreu]

Begründen Sie, dass das Dreieck DEP gleichschenkelig ist, und bestimmen Sie die Länge der Höhe h.

[Zur Kontrolle: $h = 15\sqrt{2}$]

- (4) Begründen Sie, dass der Abstand des Punktes G zur Ebene durch DEF direkt aus den x_3 -Koordinaten der entsprechenden Punkte ermittelt werden kann, und geben Sie diesen Abstand an.



Name: _____

- (5) Für die obere Etage wird eine Anlage zur Entfeuchtung der Luft installiert, die für 100 m^3 Rauminhalt eine elektrische Leistung von 0,8 Kilowatt benötigt.

Weisen Sie nach, dass für den Betrieb der Anlage eine Leistung von 25 Kilowatt ausreichend ist.

(4 + 3 + 5 + 3 + 5 Punkte)

Die obere Etage wird durch einen Laser alarmgesichert.

Der Laser ist im Punkt Q mit $Q(-9 | 8 | 15,5)$ an einer Metallstange befestigt. Diese Metallstange verläuft geradlinig von der Spitze G der Pyramide über den Punkt Q zur Bodenfläche der oberen Etage.

- c) (1) *Ermitteln Sie die Koordinaten des Bodenpunktes R der Metallstange in der Bodenfläche und die Länge der Metallstange.*

[Hinweis: Ein Nachweis, dass der Punkt R innerhalb des Dreiecks DEF liegt, wird nicht erwartet.]

- (2) Der Laser im Punkt Q ist so eingestellt, dass der Lichtstrahl in Richtung des

Vektors \vec{v} mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,84 \\ 0,02 \end{pmatrix}$ ausgerichtet ist.

Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl mit dieser Einstellung auf die Kante \overline{GE} trifft.

(7 + 8 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Analytische Geometrie und Lineare Algebra

- Lineare Gleichungssysteme
- Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
- Lagebeziehungen
- Skalarprodukt

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

S wird bestimmt als Schnittpunkt der Geraden AD mit der Geraden BE .

Eine Gleichung der Geraden AD lautet: $AD : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R},$

eine Gleichung der Geraden BE lautet: $BE : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}.$

Diese Geradengleichungen werden in der ersten Zeile der Lösung, die in der Aufgabe angegeben ist, gleichgesetzt. Durch dieses Verfahren erhält man die Lösung $r = s = 3$.

In der zweiten Zeile der angegebenen Lösung wird in die Geradengleichung der Geraden AD der Wert für r eingesetzt. Dadurch erhält man die Koordinaten des Schnittpunktes S .

Teilaufgabe b)

- (1) Das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird

gebildet. Da $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} \neq 0$; $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EF} \neq 0$ und $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EF} \neq 0$ ist, liegt kein rechter Winkel im Dreieck DEF vor.

- (2) Der Innenwinkel ε bei E wird gebildet durch die Vektoren \overrightarrow{EF} und \overrightarrow{ED} .

$$\cos(\varepsilon) = \frac{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{ED}| \cdot |\overrightarrow{EF}|} = \frac{750}{30 \cdot \sqrt{1250}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \Rightarrow \varepsilon = 45^\circ.$$

- (3) Der Punkt P auf der Seite \overline{EF} ist der Fußpunkt der Höhe h auf diese Seite.

Damit liegt bei P im Dreieck DEP ein rechter Winkel vor.

Da der Winkel ε den Wert 45° hat, ist nach dem Winkelsummensatz im Dreieck DEP der Winkel bei D ebenfalls 45° groß. Daraus folgt, dass das Dreieck gleichschenkelig ist. Die Höhe h des Dreiecks ergibt sich z. B. durch eine Winkelbeziehung im rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin(45^\circ) = \frac{h}{|\overrightarrow{ED}|}; h = |\overrightarrow{ED}| \cdot \sin(45^\circ) = \frac{30}{\sqrt{2}} = 15 \cdot \sqrt{2} \approx 21,21 \text{ [m]}.$$

- (4) Da die Ebene durch DEF parallel zur x_1x_2 -Ebene liegt, kann der Abstand des Punktes G zur Ebene direkt aus den x_3 -Koordinaten der entsprechenden Punkte ermittelt werden:
Abstand = $35 \text{ [m]} - 15 \text{ [m]} = 20 \text{ [m]}$.

- (5) Die obere Etage ist eine Pyramide mit dem Dreieck DEF als Grundfläche.

Die Körperhöhe h_{Pyramide} entspricht dem Abstand aus (4): $h_{\text{Pyramide}} = 20 \text{ [m]}$.

Die Grundfläche der Pyramide ist die Fläche des Dreiecks DEF :

$$G = \frac{1}{2} \cdot h \cdot |\overrightarrow{EF}| = 0,5 \cdot 15\sqrt{2} \cdot \sqrt{1250} = 375 \text{ [m}^2\text{]}.$$

Damit ergibt sich für das Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 375 \cdot 20 = 2500 \text{ [m}^3\text{]} = 25 \cdot 100 \text{ [m}^3\text{]}.$$

Die Anlage mit einer Leistung von 25 kW reicht aus, da $25 \cdot 0,8 \text{ kW} = 20 \text{ kW}$.

Teilaufgabe c)

(1) Die Metallstange wird durch die Gerade GQ modelliert.

Der Punkt R liegt auf der Geraden GQ und in der Ebene des Dreiecks DEF .

Damit hat der Punkt R die x_3 -Koordinate $x_3 = 15$ wie alle Punkte der Ebene, in der das Dreieck DEF liegt.

Eine Parametergleichung der Geraden GQ ist:

$$g_{GQ} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -19,5 \end{pmatrix}; \quad u \in \mathbb{R}.$$

Die Bedingung $x_3 = 15$ ergibt: $u = \frac{40}{39}$.

Damit hat R die auf zwei Nachkommastellen gerundeten Koordinaten $R(-8,97 | 7,95 | 15)$.

Die Länge der Metallstange in der oberen Etage wird durch die Länge der Strecke \overline{GR}

modelliert: $\left| \frac{40}{39} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -19,5 \end{pmatrix} \right| \approx 20,13 \text{ [m]} .$

- (2) Durch den Vektor \vec{v} und den Punkt Q ist die Gerade l festgelegt, die den Lichtstrahl modelliert.

Eine Parametergleichung der Geraden l ist:

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 15,5 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,84 \\ 0,02 \end{pmatrix}; \quad m \in \mathbb{R}.$$

Eine Parametergleichung der Strecke \overline{GE} ist:

$$\overline{GE}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -20 \end{pmatrix}; \quad n \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 \leq n \leq 1.$$

Wenn sich die Gerade l und die Gerade GE in einem Punkt schneiden und es gilt $0 \leq n \leq 1$, so liegt der Schnittpunkt auf der Kante \overline{GE} .

Das Gleichsetzen der Gleichungen für l und \overline{GE} liefert ein überbestimmtes

$$\begin{array}{l} \text{Gleichungssystem:} \\ I: \quad -9 + 0,34m = -10 + 10n \\ II: \quad 8 + 0,84m = 10 + 20n. \\ III: 15,5 + 0,02m = 35 - 20n \end{array}$$

Die Gleichungen I und II liefern die Lösungen $m = 25$ und $n = 0,95$.

Die Gleichung III ergibt mit diesen Werten eine wahre Aussage. Somit schneiden sich die Geraden in einem Punkt.

Da für n die Bedingung $0 \leq n \leq 1$ erfüllt ist, liegt der Schnittpunkt auf der Kante \overline{GE} .
Somit trifft der Lichtstrahl die Kante.