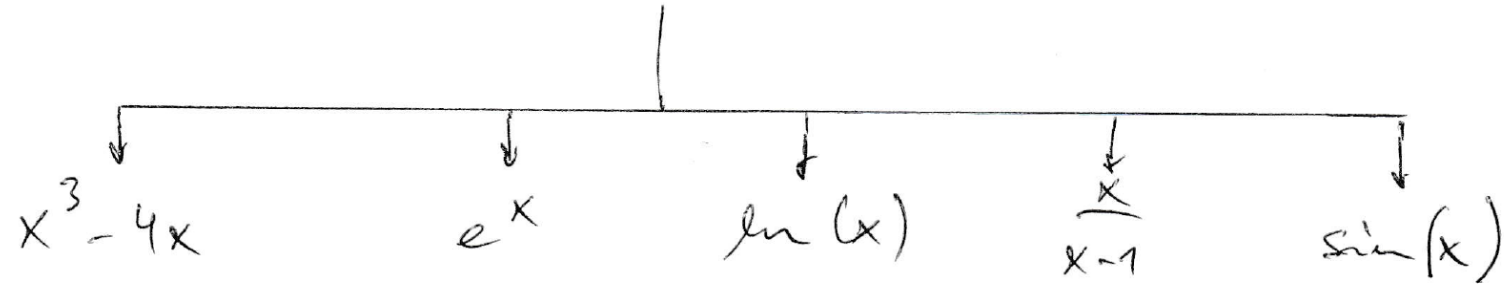


Mathematik - Analysis

Analysis - Komplettübersicht

- Interpretation im Sachzusammenhang
- Ablauf Kurvendiskussion
- Ableiten → Was bringt es?
- Integrieren → Wozu?
- Besonderes
 - Tangenten, Linearisieren
 - Extremwertproblem, Optimierung

Analysis - Komplettübersicht



- Ganzrationale Funktionen
- Exponentialfunktionen, e-Funktionen
- Logarithmische Funktionen
- Gebrochen rationale Funktionen
- Trigonometrische Funktionen

Kurvendiskussion $f(x) = \dots$

- Definitionsbereich D , Wertebereich W
- Verhalten an den Rändern von D ($\lim_{x \rightarrow \infty} (\dots)$)
- Symmetrieregeln (Punkt- / Achsensymmetrie?)
- Achsenschnittpunkte (Nullstellen, y-Achsenabschnitt)
- Extrempunkte (Extremstellen, Hoch- oder Tiefpunkt?)
- Wendepunkte, Krümmungsverhalten
- Zeichnen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{AS: } f(-x) = f(x) \\ \rightarrow x^4 - x^2 + 1 = f(x)$$

$$\text{PS: } (-f(x)) = f(-x) \\ \rightarrow x e^{x^2} = f(x)$$

Definitionsbereich D , Wertebereich W

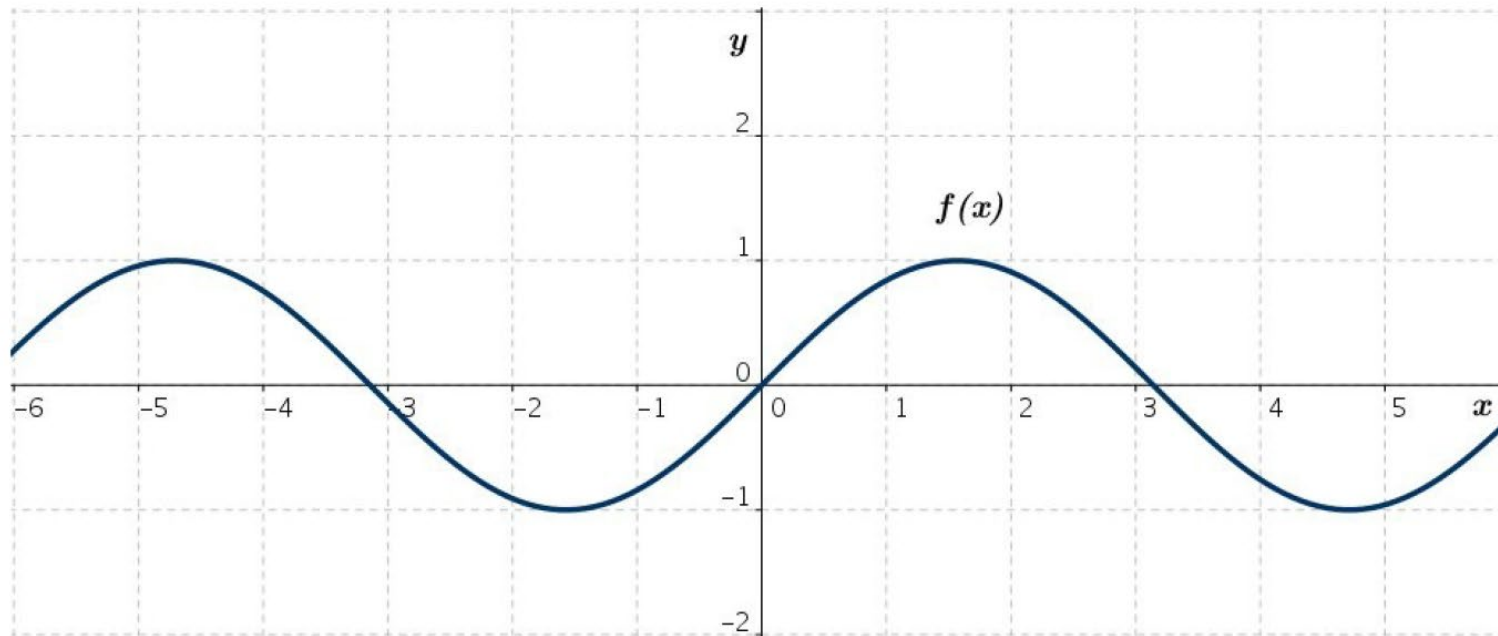
Definitionsbereich D :

- Definitionsbereich einer Funktion ist die Menge aller x -Werte, für die die Funktion definiert ist

Wertebereich W :

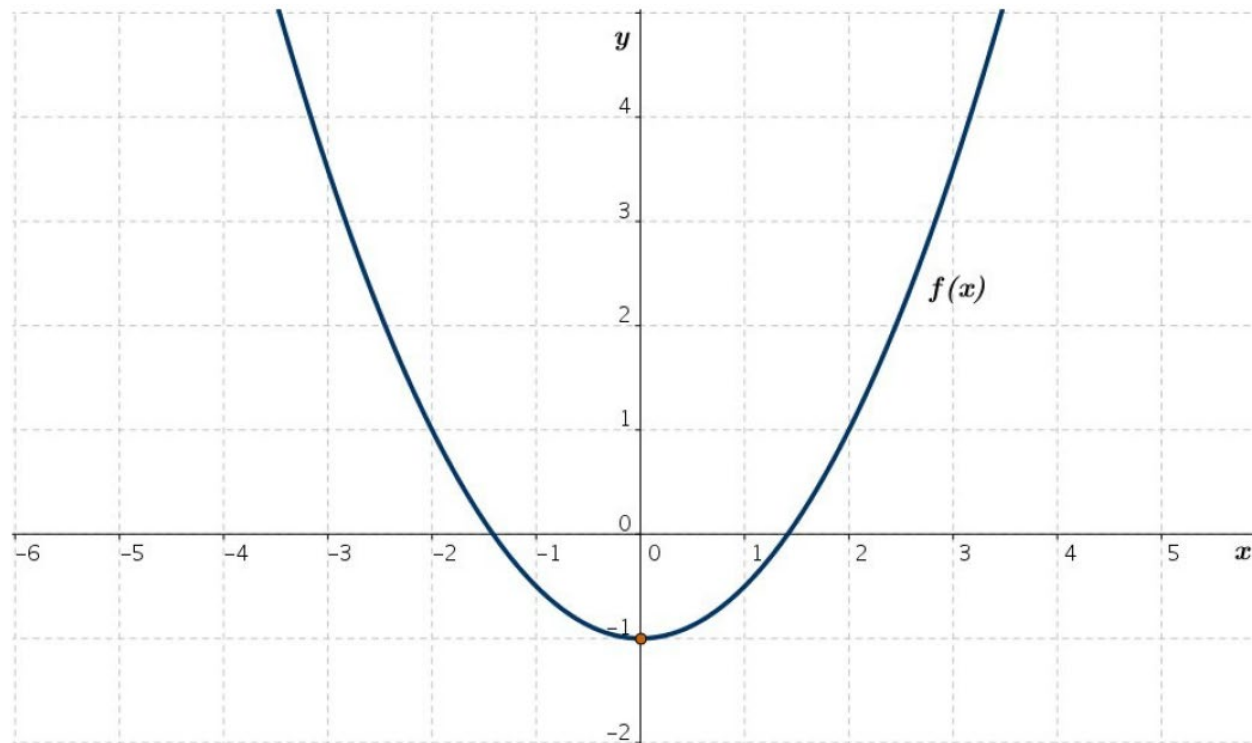
- Wertebereich einer Funktion ist die Menge aller y -Werte der Funktion

Definitionsbereich D , Wertebereich W



$$f(x) = \sin x, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = [-1, 1]$$

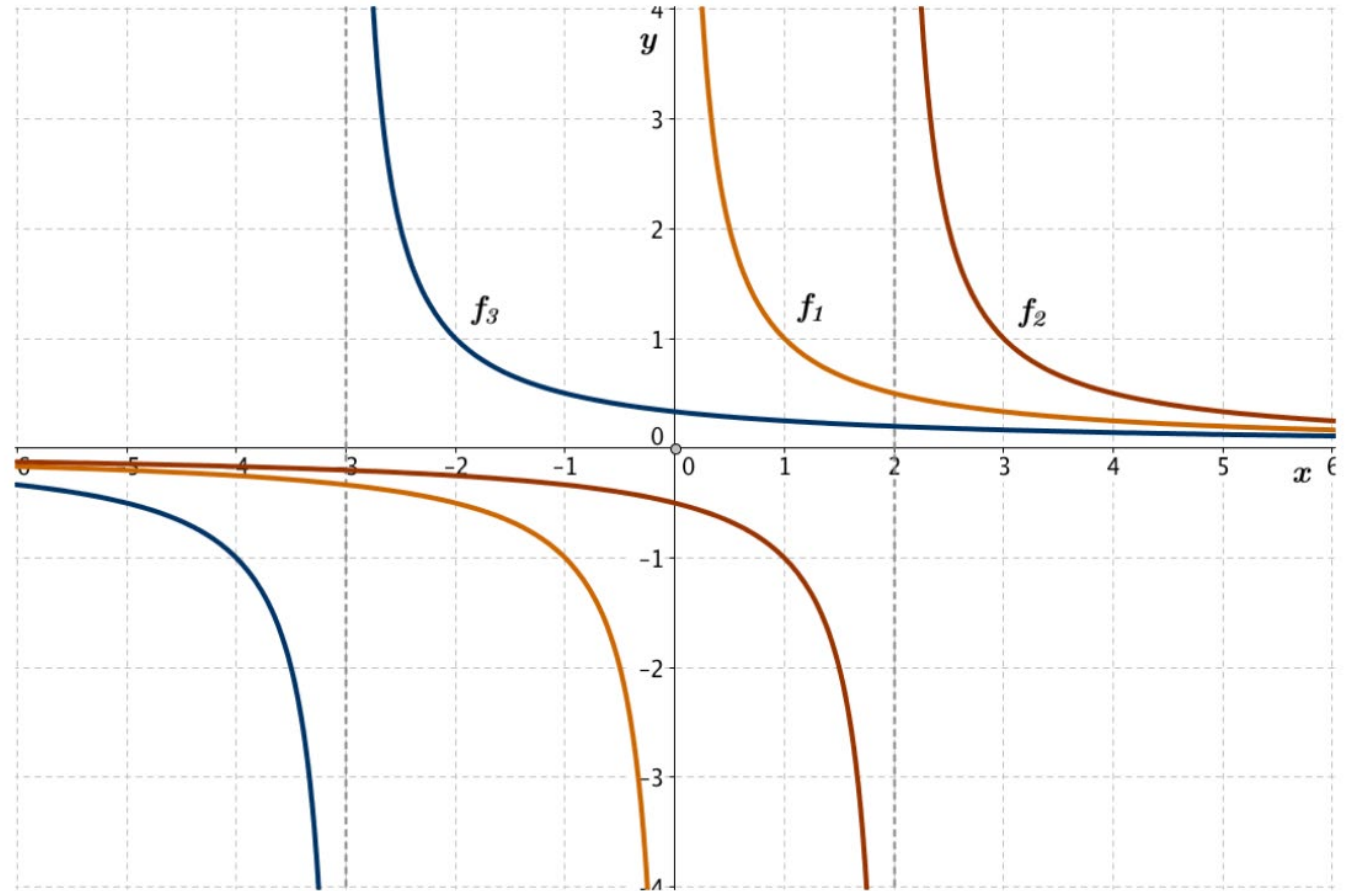
Definitionsbereich D , Wertebereich W



$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 1, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = [-1, \infty)$$

Definitionsbereich D , Wertebereich W

Gebrochen rationale Funktionen:



Definitionsbereich D , Wertebereich W

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$x = 0$ ist eine sogenannte **Definitionslücke**. An dem Punkt ist die Funktion nicht definiert!

$$f_2(x) = \frac{1}{x - 2}, \quad x \neq 2,$$

$$D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad W(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x + 3}, \quad x \neq -3,$$

$$D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, \quad W(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Verhalten an den Rändern - ganzrationale Funktionen

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 100$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\underbrace{\frac{2x^3}{x^3}}_0 - \underbrace{\frac{4x^2}{x^3}}_0 - \underbrace{\frac{x}{x^3}}_0 + \underbrace{\frac{100}{x^3}}_0 \right) = -\infty$$

⇒ Welche Funktion wächst am schnellsten?

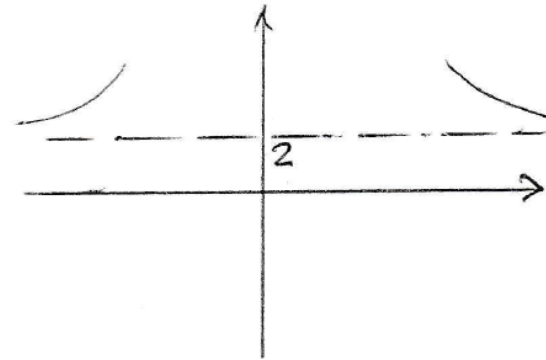
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\dots \right) = +\infty$$

Verhalten an den Rändern – gebrochen rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x}$$

$$N(x) > Z(x) \rightarrow 0$$

$$g(x) = \frac{2x}{x - 10}$$



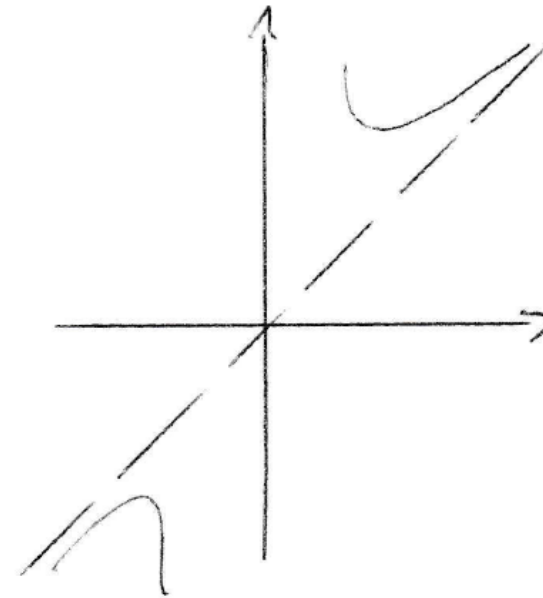
↳ Polynomdivision:

$$(2x) : (x - 10) = \underline{\underline{2}} + \frac{20}{x - 10} \rightarrow \text{waagerechte Asymptote}$$

$$\begin{array}{r} - (2x - 20) \\ \hline 20 \end{array}$$

Verhalten an den Rändern – gebrochen rationale Funktionen

$$h(x) = \frac{5x^3}{x^2 - 2}$$
$$\hookrightarrow (5x^3) : (x^2 - 2) = 5x + \frac{10x}{x^2 - 2}$$
$$\begin{array}{r} - (5x^3 - 10x) \\ \hline 10x \end{array}$$



Achsensymmetrie / Punktsymmetrie

$$f(x) = x^4 + x^2 \quad ?$$
$$\Rightarrow f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x) \quad \checkmark \quad \text{A.S.}$$

$$f(x) = x^3 + 2x \quad ?$$
$$\Rightarrow f(-x) = (-x)^3 + 2 \cdot (-x) = -x^3 - 2x \neq f(x) \quad !$$
$$-f(x) = -(x^3 + 2x) = -x^3 - 2x = f(-x) \quad \text{P.S.} \quad \checkmark$$

Achsensymmetrie / Punktsymmetrie

$$f(x) = x \cdot e^{x^2}$$

$$f(-x) = (-x) \cdot e^{(-x)^2} = -x \cdot e^{x^2} \neq f(x) !$$

$$-f(x) = -(x \cdot e^{x^2}) = -x \cdot e^{x^2} = f(-x) \quad \text{P.S.} \checkmark$$

Logarithmus

$$10^x = 5 \quad 10^{\lg(5)} = 5$$

$$x = \log_{10}(5) = \lg(5)$$

$$\log a^b = b * \log a$$

Logarithmus

$$\begin{aligned}a^x &= z \\(10^{\lg(a)})^x &= 10^{\lg(z)} \\10^{x \cdot \lg(a)} &= 10^{\lg(z)} \\x \cdot \lg(a) &= \lg(z) \\\Rightarrow x &= \frac{\lg(z)}{\lg(a)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5^x &= 22 \\x &= \log_5(22) \\x &= \frac{\lg(22)}{\lg(5)}\end{aligned}$$

Logarithmus

$$e^x = z$$

$$\ln(e^x) = \ln(z)$$

$$x = \ln(z)$$

$$\ln(e^x) = x * \ln e = x * 1 = x$$

$$\ln(2e^{3x}) = \ln(2) + 3x$$

$$\ln(a * b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(e^{3x}) = 3x * \ln e = 3x * 1 = 3x$$

Ableiten

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^6 \rightarrow \text{"-1"} \\
 &\downarrow \\
 f'(x) &= 6x^5 \rightarrow -1 \\
 &\downarrow \\
 f''(x) &= 30x^4
 \end{aligned}$$

Ableiten

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow f'(x^{-1}) = -1 x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}x^{-1} \rightarrow f'\left(\frac{1}{2}x^{-1}\right) = -\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 6 \cdot \frac{1}{6} x^6 \rightarrow +1 \\
 &\uparrow \\
 f'(x) &= 30 \cdot \frac{1}{5} x^5 \rightarrow +1 = 6x^5 \\
 &\uparrow \\
 f''(x) &= 30 \cdot x^4
 \end{aligned}$$

"Aufleiten"

= Integrieren

Ableiten

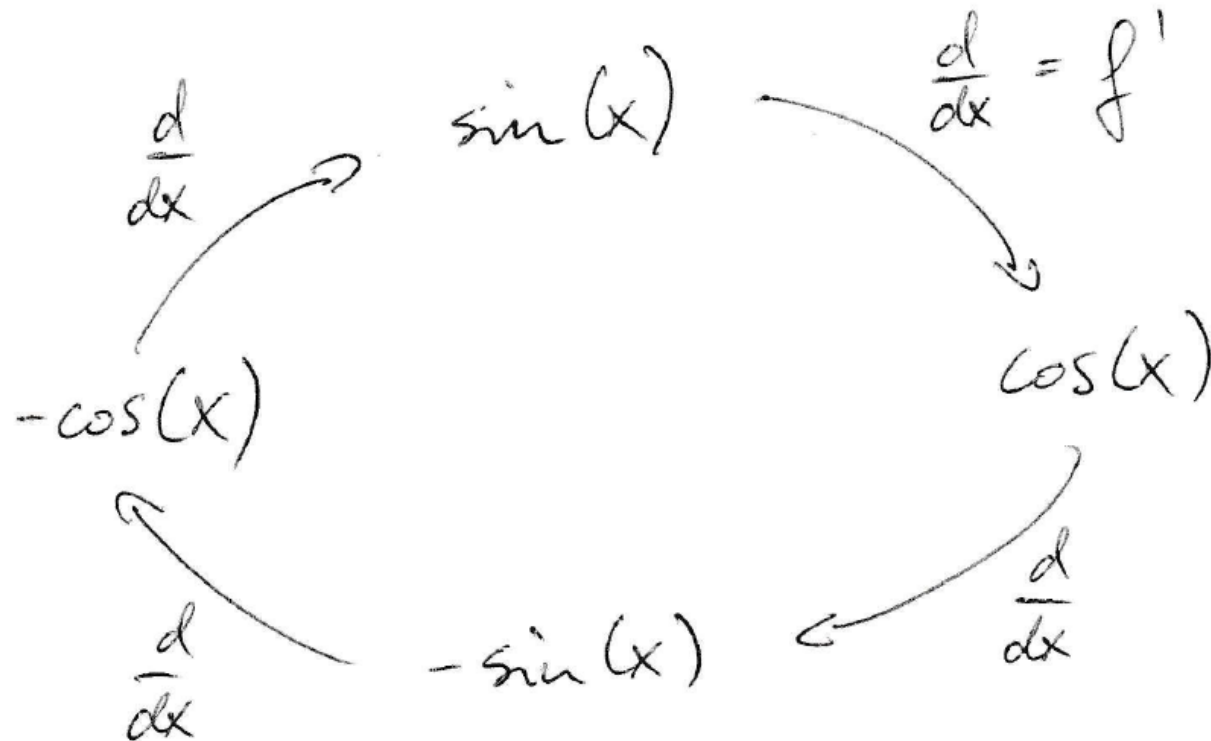
$$f(x) = 12x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 2x^2 + x + 10$$

$$f'(x) = 60x^4 + 24x^3 + 21x^2 + 4x + 1$$

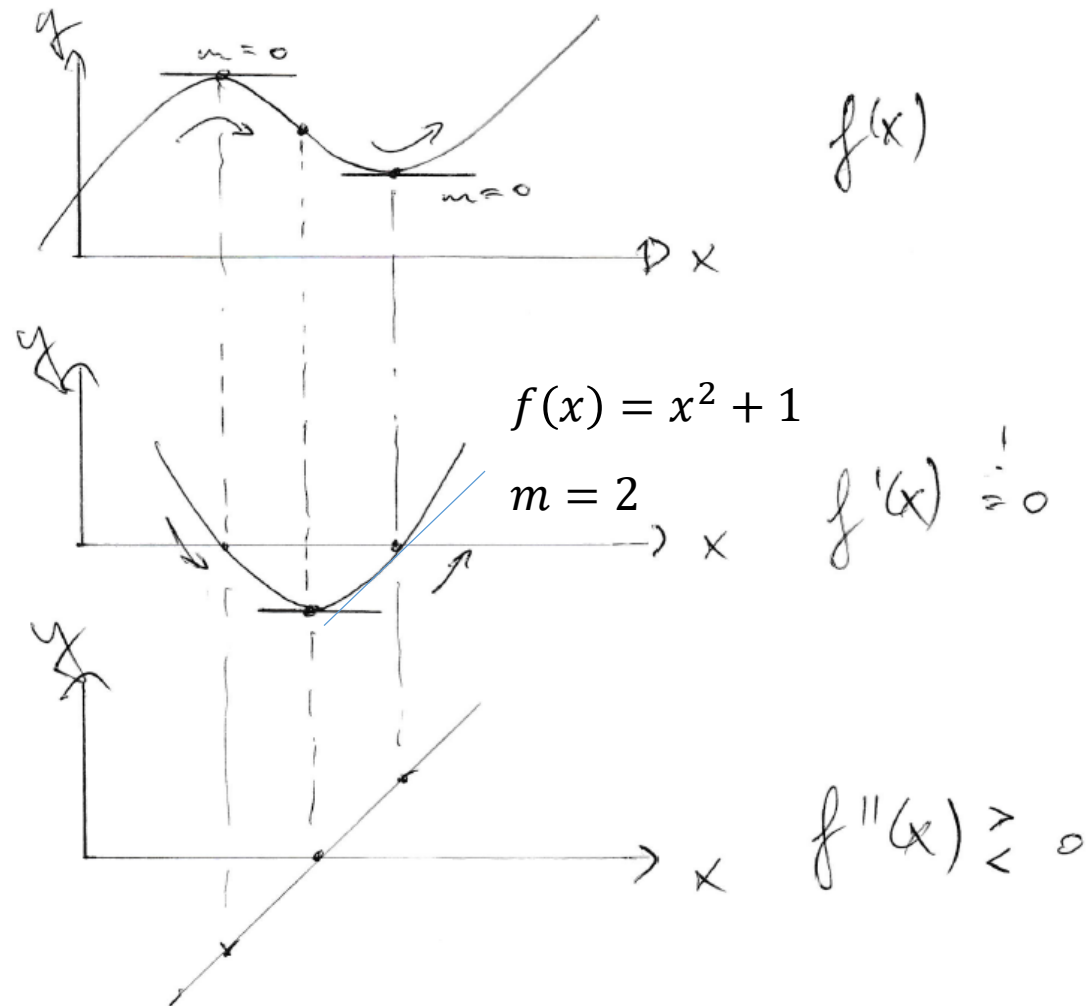
$$f''(x) = 240x^3 + 72x^2 + 42x + 4$$

⋮

Ableiten



Ableiten



Extremwerte

$$f(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 6x - 6$$

$$f''(x) = 6$$

$$\text{Notwendige Bed.: } f'(x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = 6 \rightarrow x_E = 1$$

Extremwerte

Hinreichende Bed.: $f'(x_E) \stackrel{!}{=} 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

wobei gilt: $f''(x_E) < 0 \rightarrow \text{Maximum}$

$f''(x_E) > 0 \rightarrow \text{Minimum}$

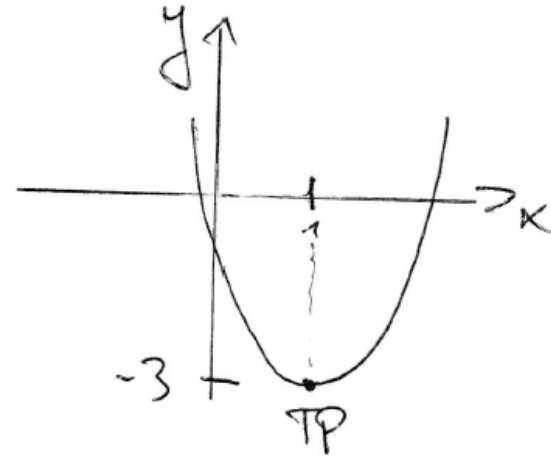
$\rightarrow f''(1) = 6 > 0 \rightarrow \underline{\text{Minimum}}$

Extremwerte

$$f(1) = 3 \cdot (1)^2 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3$$

→ Tiefpunkt TP (1 | -3)

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$

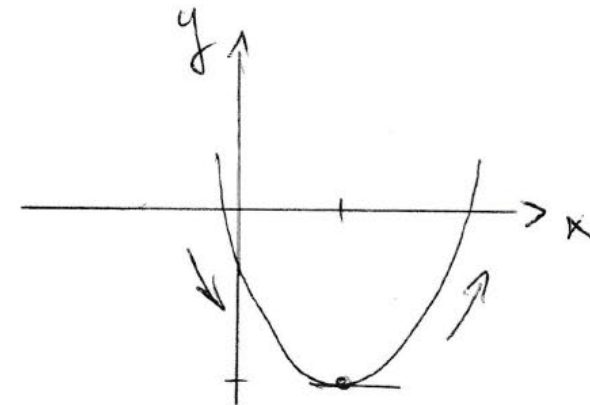


Extremwerte

Alternativ: Vorzeichenwechselmethode

→ Hinweisende Bed.: „VZW-M“

x	0	1	2
$f'(x)$	-6	0	6
	⊖		⊕



Wendepunkte

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x$$

$$f''(x) = 12x - 12$$

$$f'''(x) = 12$$

$$\text{Notw. Bed.: } f''(x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow 12x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x = 12 \quad (\Rightarrow) \quad x_w = 1$$

Wendepunkte

$$\text{Hinw. Bed.: } f''(x_w) \stackrel{!}{=} 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$$

$$\text{wobei gilt: } f'''(x_w) < 0 \rightarrow \text{L. - R. - W.}$$

$$f'''(x_w) > 0 \rightarrow \text{R. - L. - W.}$$

$$f'''(1) = 12 > 0$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 = -4 \quad \text{W(1 | -4)}$$

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$f'(x) = u'vw + uv'w + uvw'$$

Produktregel

Beispiel: $f(x) = 5x^3 \cdot \sin(x)$

$$u = 5x^3 \qquad v = \sin(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{15x^2}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_v + \underbrace{5x^3}_u \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}$$

$$f'(\sin(3x)) = \cos(3x) * 3 = 3\cos(3x)$$

Produktregel

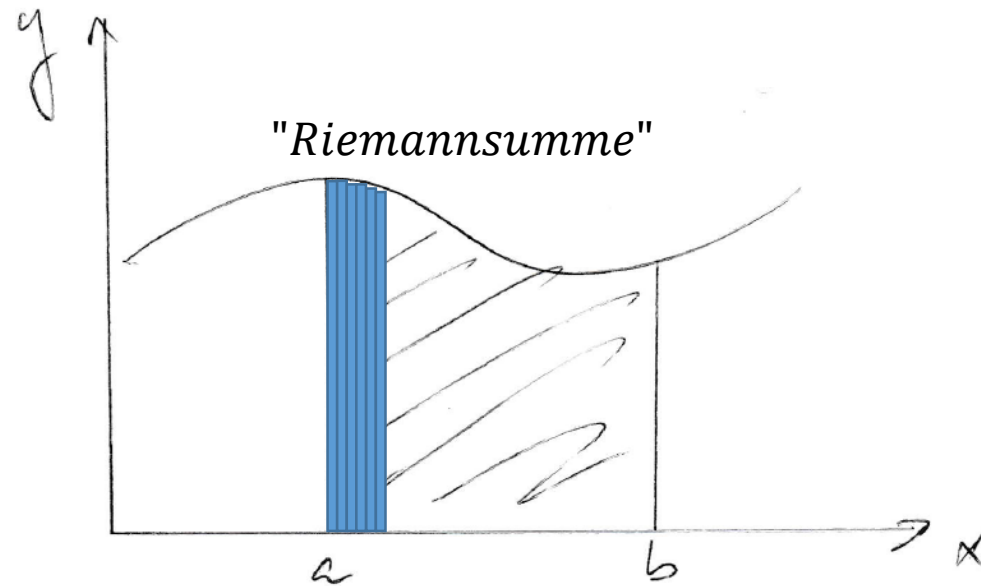
$$f(x) = \underbrace{(x^2+1)}_u \underbrace{e^{-x}}_v$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{e^{-x}}_v + \underbrace{(x^2+1)}_u \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'} \cdot \underbrace{(-1)}_{\substack{\text{innere Ableitung}}}$$

$$= 2x \cdot e^{-x} - (x^2+1)e^{-x}$$

$$= e^{-x} (2x - x^2 - 1)$$

Integrale



$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Integrale

Bsp. $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \int_a^b x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_a^b$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} b^4 - \frac{1}{4} a^4 = \frac{1}{4} (b^4 - a^4)$$

Partielle Integration

$$\begin{aligned} F(x) &= u \cdot v - \int (u' \cdot v) dx \\ f(x) &= u \cdot v' \end{aligned}$$

Partielle Integration

$$f(x) = \underset{u}{x} * \underset{v'}{e^{3x}}$$

$$F(x) = \underset{u}{x} * \underset{v}{\frac{1}{3}e^{3x}} - \int \underset{u'}{1} * \underset{v}{\frac{1}{3}e^{3x}} dx =$$

$$= x * \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx$$

$$= x * \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * e^{3x}$$

$$= e^{3x} * \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)$$

Partielle Integration

Beispiel:

$$\int e^x \cdot (2 - x^2) dx$$

$$= e^x \cdot (2 - x^2) - \int e^x \cdot (-2x) dx$$

Partielle Integration

$$= e^x \cdot (2 - x^2) + e^x \cdot 2x - \int 2 \cdot e^x dx$$

$$= e^x \cdot (2 - x^2) + e^x \cdot 2x - 2 \cdot e^x + C$$

$$= e^x (2 - x^2 + 2x - 2) + C$$

$$= e^x (2x - x^2) + C$$

Substitution

$$\int x^2 \cdot e^{x^3} dx = ?$$

1.) Substituieren:

$$u = x^3$$

2.) „u nach x ableiten“:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

Substitution

3.) Umstellen nach dx :

$$dx = \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3x^2} du$$

4.) dx durch Faktor mal du ersetzen:

$$\rightarrow \int x^2 \cdot e^u \cdot \frac{1}{3x^2} du$$

$$= \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C^*$$

Substitution

5.) Rücksubstitution: $u = x^3$

$$\rightarrow = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$



Substitution

$$\int \tan(x) dx = ?$$

$$= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$$

Substituieren: $u = \cos(x)$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin(x) \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{\sin(x)} du$$

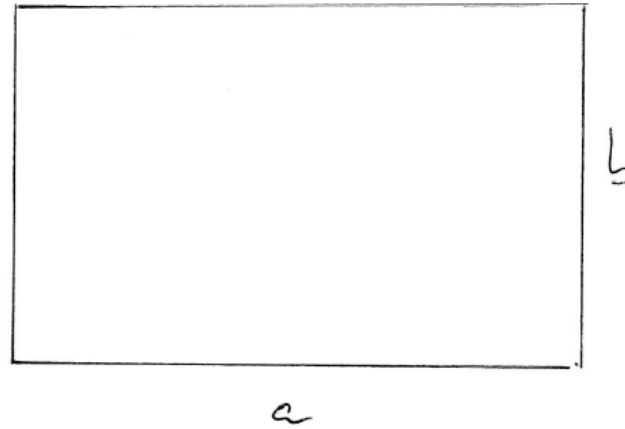
Substitution

$$\begin{aligned}\text{Einsetzen: } &\rightarrow = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \left(-\frac{1}{\sin(x)}\right) du \\ &\quad \quad \quad \rightarrow = u \\ &= - \int \frac{1}{u} du \\ &= -\ln|u| + C^*\end{aligned}$$

$$\text{Rücksubstitution: } u = \cos(x)$$

$$\Rightarrow \int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

Extremwertprobleme



Frage:

- Wie sind a und b zu wählen, damit der Flächeninhalt möglichst maximal wird?
- Gegeben: Umfang 16m vorhanden

Extremwertprobleme

1. Was muss maximiert oder minimiert werden?
➤ „Hauptbedingung“

$$A = a \cdot b \quad (\text{HB})$$

2. Was ist die Nebenbedingung?

$$U = 2a + 2b = 16 \quad (\text{NB})$$

3. NB umstellen und nach einer Variable auflösen

$$a = 8 - 1b$$

4. NB in HB einsetzen

$$A(b) = (8 - 1b) \cdot b \quad (\text{ZF})$$

5. Zielfunktion (ZF) aus 4. zusammenfassen

$$A(b) = 8b - b^2$$

6. Extremwerte bestimmen

$$A'(b) = 8 - 2b = 0$$

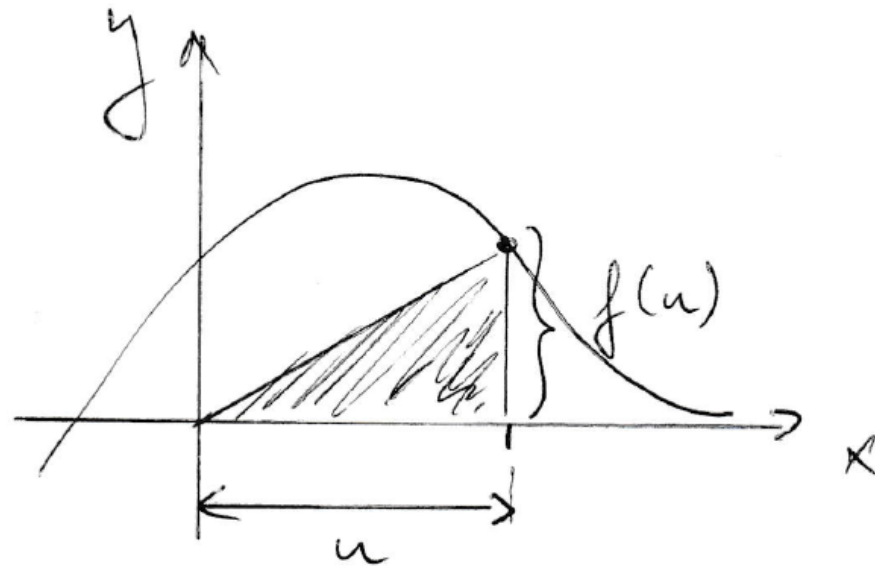
$$A''(b) = -2 < 0 \quad \rightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$b = 4 \rightarrow a = 4$$

(folgt daraus automatisch)

Extremwertprobleme

Bsp.:



$$f(x) = (x+1)e^{-x}$$

Extremwertprobleme

$$A = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$$

$$| u = u_{\text{opt. Wert}} "$$

$$A(u) = \frac{1}{2} u \cdot (u+1) \cdot e^{-u}$$

$$\rightarrow A(u) = \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} u \right) e^{-u}$$

Extremwertprobleme

$$\Rightarrow A'(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right) e^{-u} + \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u\right) \cdot (-e^{-u}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \left(u + \frac{1}{2}\right) e^{-u} - \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u\right) e^{-u}$$

$$= \left[\left(u + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u\right) \right] e^{-u}$$

$$= \left(u + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u\right) e^{-u}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\right) e^{-u} \stackrel{!}{=} 0$$

Extremwertprobleme

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0 \quad | :(-\frac{1}{2}) \hat{=} \cdot (-2)$$

$$\Rightarrow u^2 - u - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad | \text{pq-Formel}$$

$$\rightarrow u_{1,2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{16}} \rightarrow \text{max.!} \\ \text{daher } +$$

$$\rightarrow A''(u) = \dots \stackrel{!}{<} 0 \quad (\text{damit HP bestätigt!})$$

dann in $A(u)$ und in $f(x)$ einsetzen!

$$\text{mit } u = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{17}{16}} \dots$$

Beispielaufgabe

1 Die Funktion f mit $f(t) = 0,4t^3 - 6t^2 + 20t + 100$ gibt näherungsweise die Herzfrequenz eines Sportlers (in Schläge pro Minute) während einer Trainingseinheit auf einem Fahrrad an, wobei $t \in [0; 11]$ die Zeit in Minuten seit Beginn der Trainingseinheit angibt.

- a) Berechnen Sie, wann die Herzfrequenz am höchsten war.
- b) Berechnen Sie, wann die Herzfrequenz am stärksten abgenommen hat.
- c) Berechnen Sie die mittlere Herzfrequenz während der Trainingseinheit innerhalb der ersten 11 Minuten.

Beispielaufgabe

$$\textcircled{1} \quad f(t) = 0,4t^3 - 6t^2 + 20t + 100$$

$$\rightarrow f'(t) = 1,2t^2 - 12t + 20$$

$$\rightarrow f''(t) = 2,4t - 12$$

$$\textcircled{II} = \mathbb{R}$$

Beispielaufgabe

$$a) \quad f'(t) = 1,2t^2 - 12t + 20 \stackrel{!}{=} 0 \quad | : 1,2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 10t + 16\frac{2}{3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 16\frac{2}{3}} \quad | \quad 16\frac{2}{3} = \frac{50}{3}$$
$$= 5 \pm \sqrt{\frac{75}{3} - \frac{50}{3}}$$

$$\rightarrow \underline{t_1 = 2,11} \quad \vee \quad t_2 = 7,89$$

Beispielaufgabe

↳ Welche?

$$\rightarrow f''(t) = 2,4 t_E - 12 < 0$$

$$\rightarrow \text{Einsetzen: } 2,4 \cdot 2,11 - 12 = -6,94 < 0 \quad (\text{HP})$$

$$2,4 \cdot 7,89 - 12 = +6,94 > 0 \quad (\text{TP})$$

$\rightarrow t_E = 2,11 \text{ min}$ ist richtig!

Beispielaufgabe

$$\begin{aligned}\rightarrow f(2,11) &= 0,4 \cdot (2,11)^3 - 6 \cdot (2,11)^2 + 20 \cdot (2,11) + 100 \\ &= \underline{\underline{119,2}} \rightarrow \text{Lok. M.} \\ f(0) &= 100 \quad f(11) = \underline{\underline{126,4}} \rightarrow \text{G. M.}\end{aligned}$$

Beispielaufgabe

b) Wann ist das Gefälle am stärksten?

$$\rightarrow f''(t) \stackrel{!}{=} 0$$

(1. Abl. der 1. Abl.)

$$\rightarrow f''(t) \stackrel{!}{>} 0$$

(größer 0, da Gefälle)

Beispielaufgabe

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(t) &= 2,4t - 12 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow 2,4t &= 12 \\ \Leftrightarrow t &= 5\end{aligned}$$

$$f''(t) = 2,4 > 0 \quad \checkmark$$

$$\underline{\underline{t = 5 \text{ min}}}$$

Beispielaufgabe

c) mittlere Herzfrequenz:

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{11} \int_0^{11} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{11} \cdot \left[0,1 \cdot t^4 - 2t^3 + 10t^2 + 100t \right]_0^{11}$$

$$= \frac{1}{11} \cdot \left(0,1 \cdot 11^4 - 2 \cdot 11^3 + 10 \cdot 11^2 + 100 \cdot 11 \right)$$

$$= 101,1 \quad \approx \underline{\underline{101}}$$