Mathematik - Analysis

Analysis - Komplettübersicht

- Interpretation im Sachzusammenhang
- Ablauf Kurvendiskussion
- Ableiten $\longrightarrow$ Was bringt es?
- Integrieren $\longrightarrow$ Wozu?
- Besonderes
  - Tangenten, Linearisieren
  - Extremwertproblem, Optimierung

Analysis - Komplettübersicht

x^3-4x $\qquad$ e^x $\qquad$ $\ln(x)$ $\qquad$ $\frac{x}{x-1}$ $\qquad$ $\sin(x)$

- Ganzrationale Funktionen
- Exponentialfunktionen, e-Funktionen
- Logarithmische Funktionen
- Gebrochen rationale Funktionen
- Trigonometrische Funktionen

Kurvendiskussion $\quad f(x) = \ldots$

- Definitionsbereich D, Wertebereich W
- Verhalten an den Rändern von D ($\lim\limits_{x \to \infty}(\ldots)$)
- Symmetrieregeln (Punkt- / Achsensymmetrie?)
- Achsenschnittpunkte (Nullstellen, y-Achsenabschnitt)
- Extrempunkte (Extremstellen, Hoch- oder Tiefpunkt?)
- Wendepunkte, Krümmungsverhalten
- Zeichnen

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

AS: $f(-x) = f(x)$

$\rightarrow x^4 - x^2 - 1 = f(x)$

PS: $(-f(x)) = f(-x)$

$\rightarrow x e^{x^2} = f(x)$

Definitionsbereich D, Wertebereich W

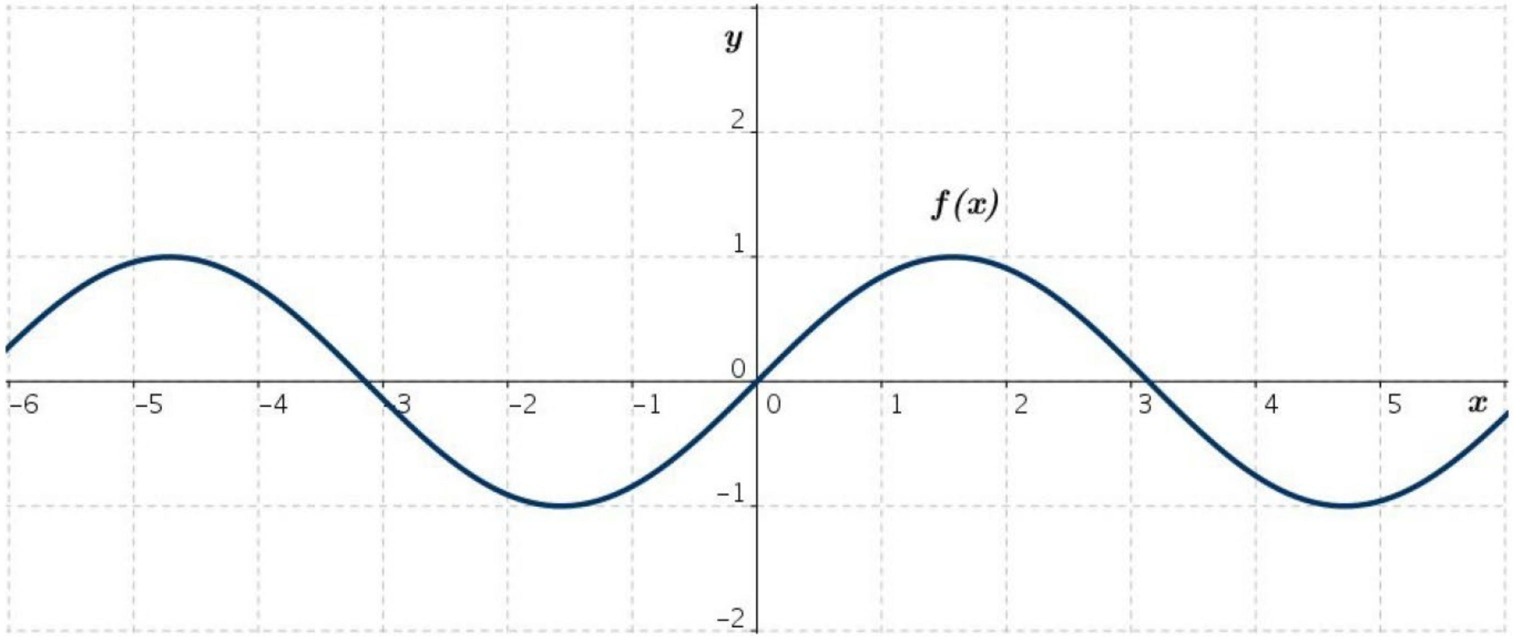
Definitionsbereich D:

- Definitionsbereich einer Funktion ist die Menge aller x-Werte, für die die Funktion definiert ist

Wertebereich W:

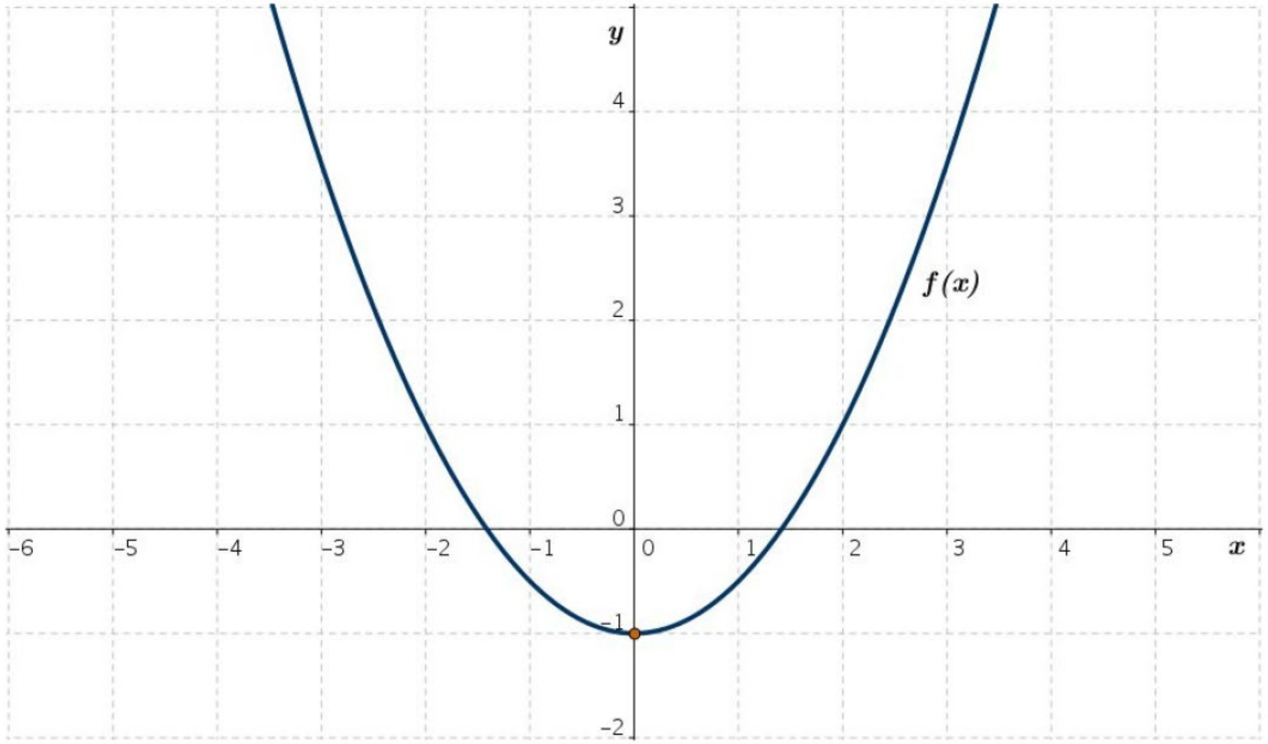
- Wertebereich einer Funktion ist die Menge aller y-Werte der Funktion

Definitionsbereich D, Wertebereich W



$$f(x) = \sin x\,, \qquad D = \mathbb{R}\,, \qquad W = [-1,\ 1]$$

Definitionsbereich D, Wertebereich W

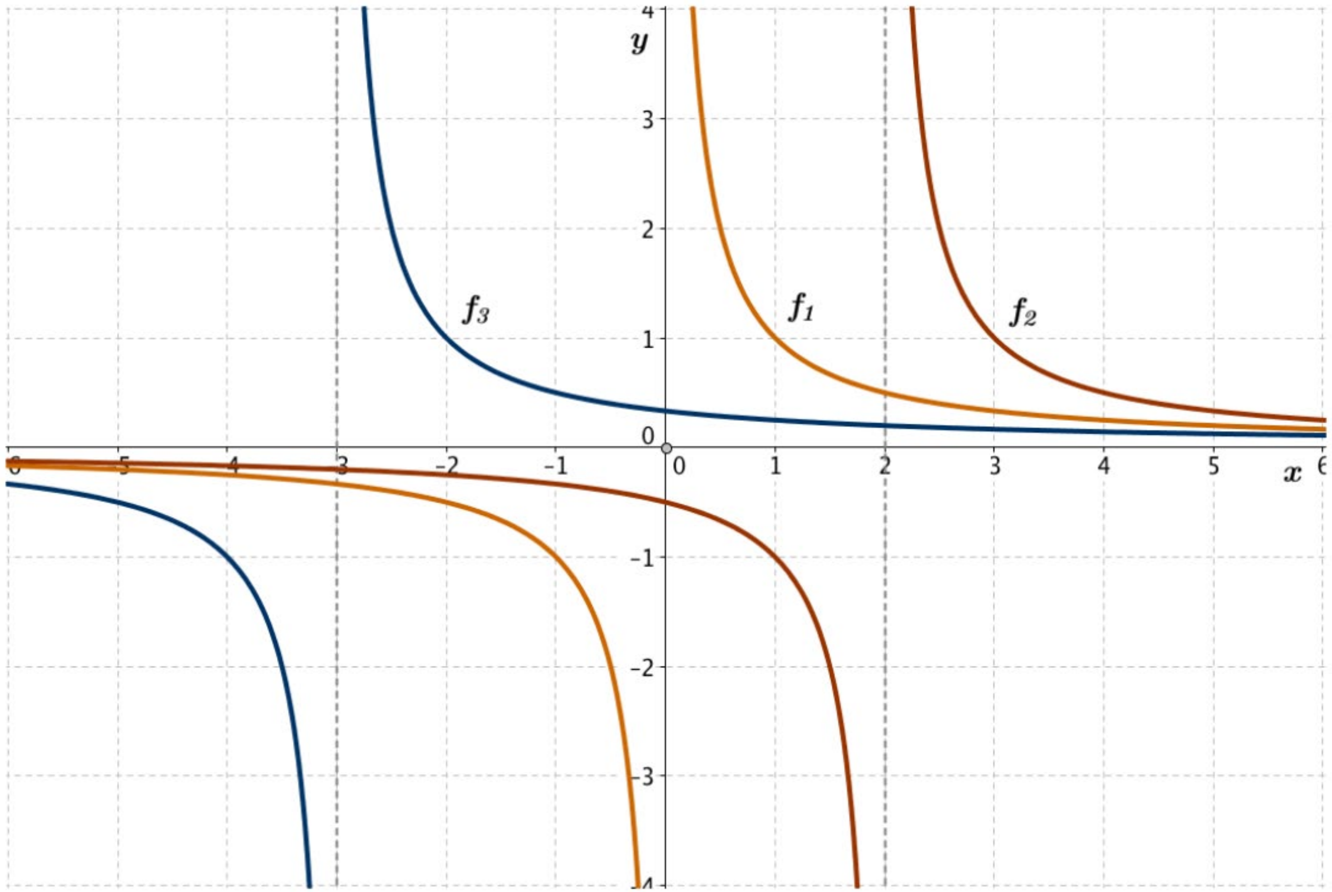


$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 1, \qquad D = \mathbb{R}, \qquad W = [-1, \infty)$$

© abiweb

Definitionsbereich D, Wertebereich W

Gebrochen rationale Funktionen:



Definitionsbereich D, Wertebereich W

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

$x = 0$ ist eine sogenannte **Definitionslücke**. An dem Punkt ist die Funktion nicht definiert!

$$f_2(x) = \frac{1}{x-2}, \qquad x \neq 2,$$

$$D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \qquad W(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x+3}, \qquad x \neq -3,$$

$$D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, \qquad W(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

© abiweb

Verhalten an den Rändern - ganzrationale Funktionen

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 100$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 \left(\frac{2x^3}{x^3} - \underbrace{\frac{4x^2}{x^3}}_{0} - \underbrace{\frac{x}{x^3}}_{0} + \underbrace{\frac{100}{x^3}}_{0} \right) = -\infty$$

⇒ Welche Funktion wächst am schnellsten?

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \left(\ldots \right) = +\infty$$

Verhalten an den Rändern – gebrochen rationale Funktionen

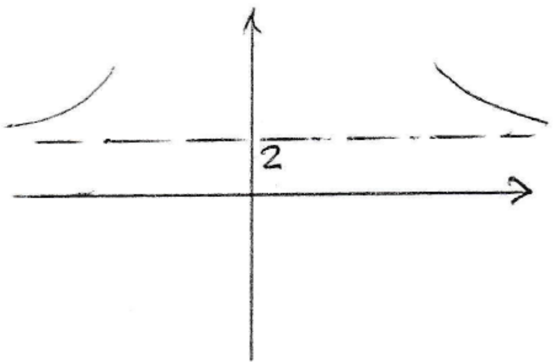
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x}$$

$N(x) > Z(x) \rightarrow 0$

$$g(x) = \frac{2x}{x - 10}$$

↳ Polynomdivision:

$$(2x):(x-10) = \underline{\underline{2}} + \frac{20}{x-10}$$
$$\frac{-(2x-20)}{20}$$



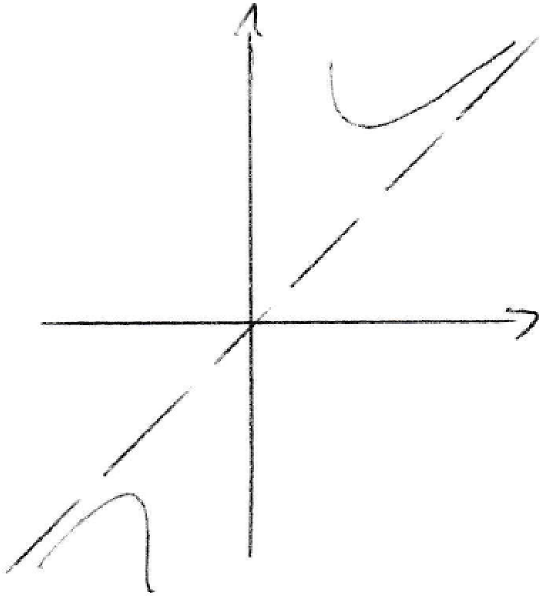
→ waagerechte Asymptote

Verhalten an den Rändern – gebrochen rationale Funktionen

$$h(x) = \frac{5x^3}{x^2 - 2}$$

$$\hookrightarrow (5x^3) : (x^2 - 2) = 5x + \frac{10x}{x^2-2}$$

$$\frac{-(5x^3 - 10x)}{10x}$$



Achsensymmetrie / Punktsymmetrie

$f(x) = x^4 + x^2 \qquad ?$

$\rightarrow f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x) \quad ✓ \quad$ A.S

$f(x) = x^3 + 2x \qquad ?$

$\rightarrow f(-x) = (-x)^3 + 2 \cdot (-x) = -x^3 - 2x \neq f(x) \quad !$

$-f(x) = (-(x^3 + 2x)) = -x^3 - 2x = f(-x) \quad$ P.S ✓

© abiweb

Achsensymmetrie / Punktsymmetrie

$$f(x) = x \cdot e^{x^2}$$

$$f(-x) = (-x) \cdot e^{(-x)^2} = -x \cdot e^{x^2} \neq f(x) \quad !$$

$$-f(x) = -\left(x \cdot e^{x^2}\right) = -x \cdot e^{x^2} = f(-x) \quad \text{P.S.} \checkmark$$

Logarithmus

$$10^x = 5 \qquad 10^{\lg(5)} = 5$$

$$x = \log_{10}(5) = \lg(5)$$

Logarithmus

$$a^x = z$$

$$\left(10^{\lg(a)}\right)^x = 10^{\lg(z)}$$

$$10^{x \cdot \lg(a)} = 10^{\lg(z)}$$

$$x \cdot \lg(a) = \lg(z)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\lg(z)}{\lg(a)}$$

$$5^x = 22$$

$$x = \log_5(22)$$

$$x = \frac{\lg(22)}{\lg(5)}$$

Logarithmus

$$e^{x} = z$$

$$\ln(e^{x}) = \ln(z)$$

$$x = \ln(z)$$

$$\ln(2e^{3x}) = \ln(2) + 3x$$

Ableiten

$f(x) = x^6$ „-1"

$\downarrow$

$f'(x) = 6x^5$ -1

$\downarrow$

$f''(x) = 30x^4$

Ableiten

$F(x) = 6 \cdot \frac{1}{6} x^6$ $+1$

$\uparrow$

$f'(x) = 30 \cdot \frac{1}{5} x^5 = 6x^5$ $+1$

$\uparrow$

$f''(x) = 30 \cdot x^4$

„Aufleiten"

= Integrieren

$\frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow f'(x^{-1}) = -1\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{2x} = \frac{1}{2} x^{-1} \rightarrow f'(\frac{1}{2} x^{-1}) = -\frac{1}{2} x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

© abiweb

Ableiten

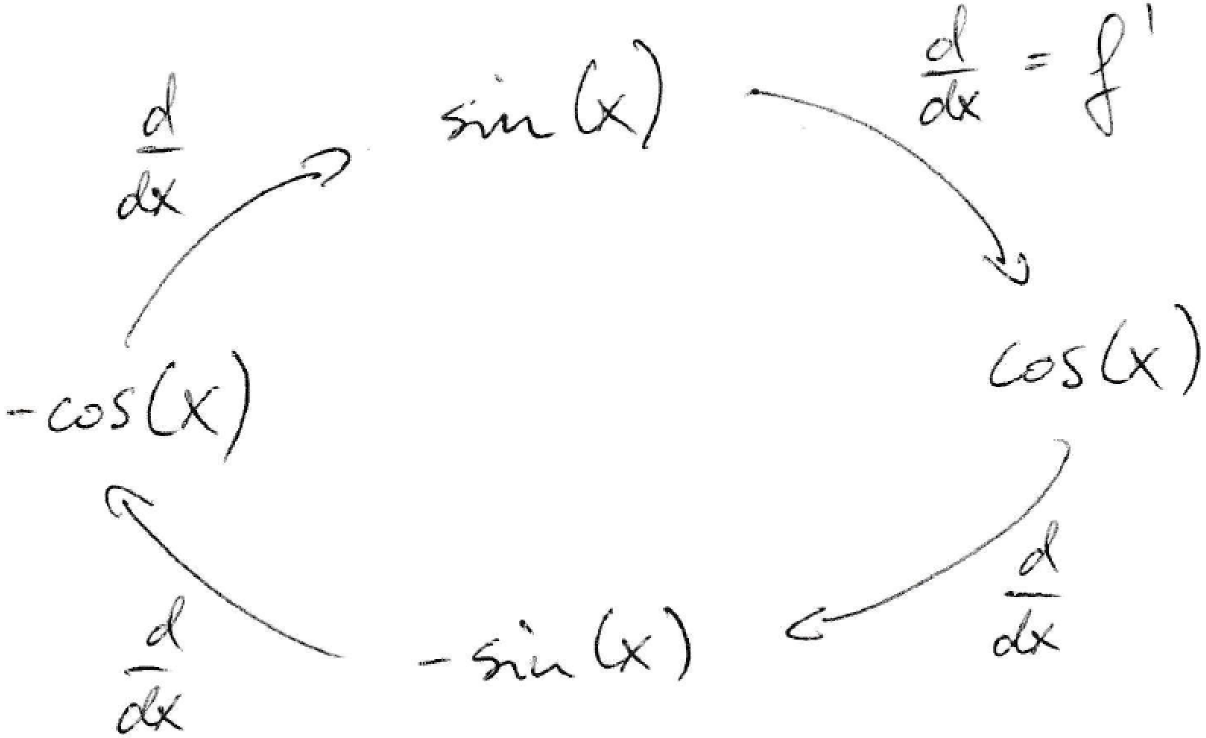
$$f(x) = 12x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 2x^2 + x + 10$$

$$f'(x) = 60x^4 + 24x^3 + 21x^2 + 4x + 1$$

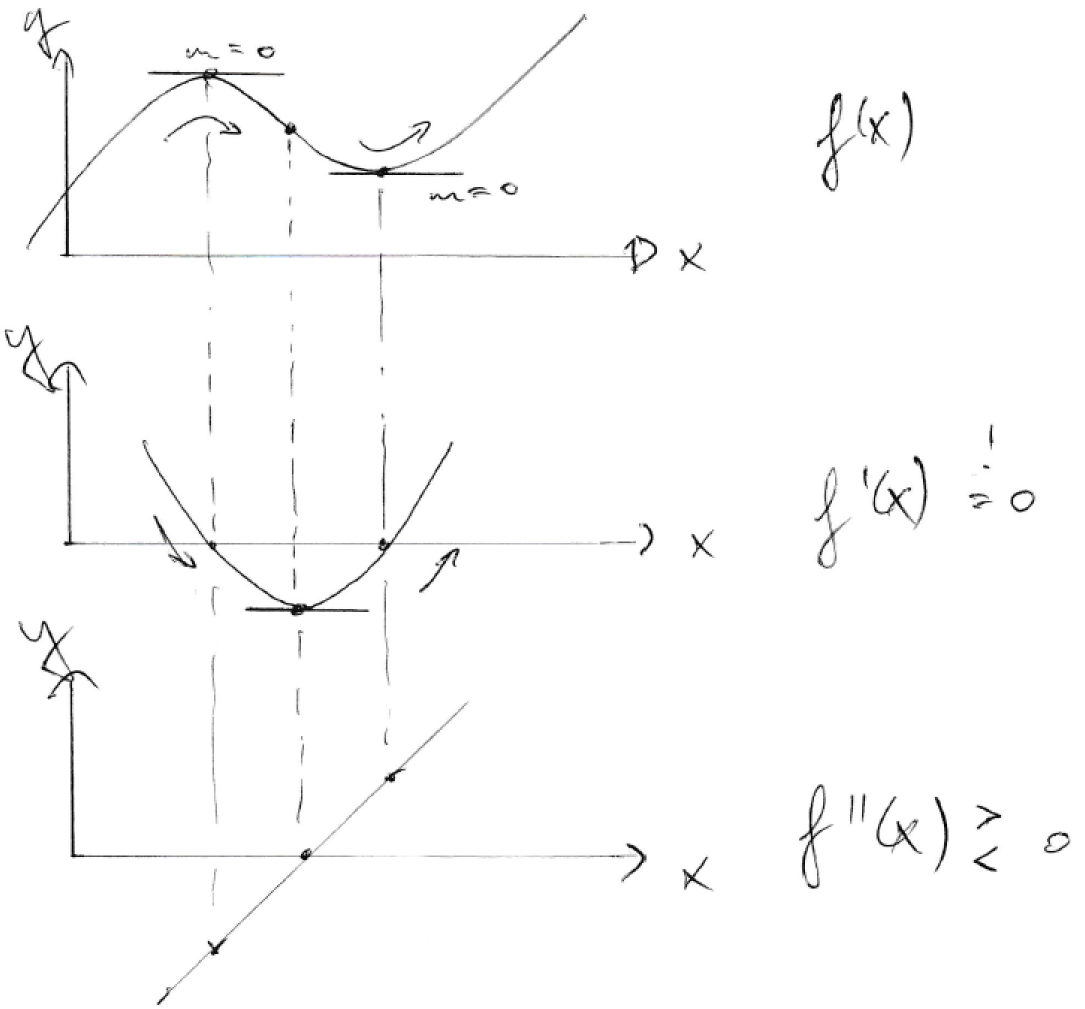
$$f''(x) = 240x^3 + 72x^2 + 42x + 4$$

$$\vdots$$

Ableiten



Ableiten



Extremwerte

$f(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 6$

Notwendige Bed.: $f'(x) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = 6 \Rightarrow x_E = 1$

© abiweb

Extremwerte

Hinreichende Bed.: $f'(x_E) \overset{!}{=} 0 \wedge f''(x_E) \overset{!}{\neq} 0$

wobei gilt: $f''(x_E) < 0 \rightarrow$ Maximum

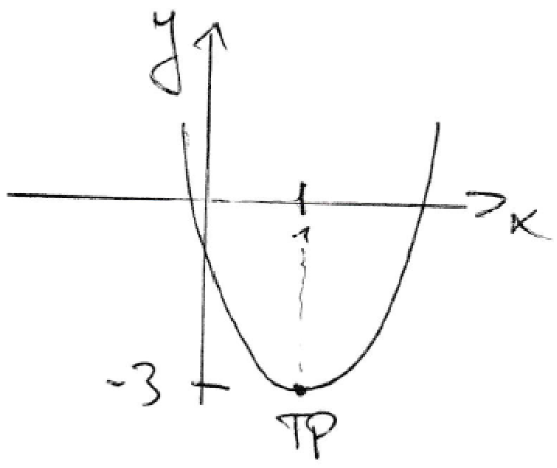
$f''(x_E) > 0 \rightarrow$ Minimum

$\rightarrow f''(1) = 6 > 0 \rightarrow$ <u>Minimum</u>

Extremwerte

$$f(1) = 3\cdot(1)^2 - 6\cdot 1 = 3 - 6 = -3$$

$\rightarrow$ Tiefpunkt $TP(\underset{x}{1} \mid \underset{y}{-3})$

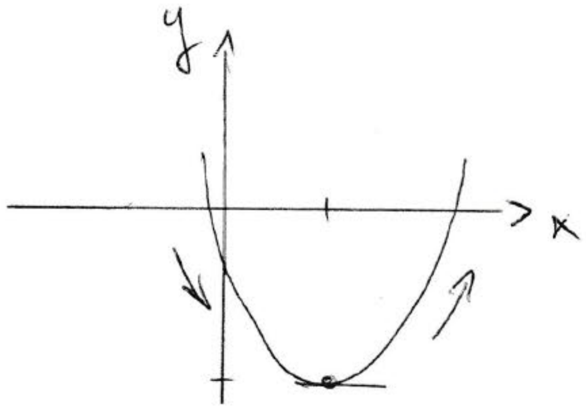


Extremwerte

Alternativ: Vorzeichenwechselmethode

→ Hinreichende Bed.: „VZWM“

x	0	1	2
$f'(x)$	-6	0	6
	$-$		$+$



Wendepunkte

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x$$

$$f''(x) = 12x - 12$$

$$f'''(x) = 12$$

Notw. Bed.: $f''(x) \overset{!}{=} 0$

$$\rightarrow 12x - 12 = 0 \Rightarrow 12x = 12 \Leftrightarrow x_w = 1$$

Wendepunkte

Hinr. Bed.: $f''(x_w) \overset{!}{=} 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$

wobei gilt: $f'''(x_w) < 0 \Rightarrow$ L.-R.-W.

$f'''(x_w) > 0 \Rightarrow$ R.-L.-W.

$f'''(1) = 12 > 0$

$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 = -4$ $\quad W(1 \mid -4)$

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$f'(x) = u'vw + uv'w + uvw'$$

© abiweb

Produktregel

Beispiel: $f(x) = 5x^3 \cdot \sin(x)$

$$u = 5x^3 \qquad v = \sin(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{15x^2}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v} + \underbrace{5x^3}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}$$

f‘(sin(3x)) = cos (3x) * 3 = 3cos(3x)

Produktregel

$$f(x) = \underset{u}{(x^2+1)}\underset{v}{e^{-x}}$$

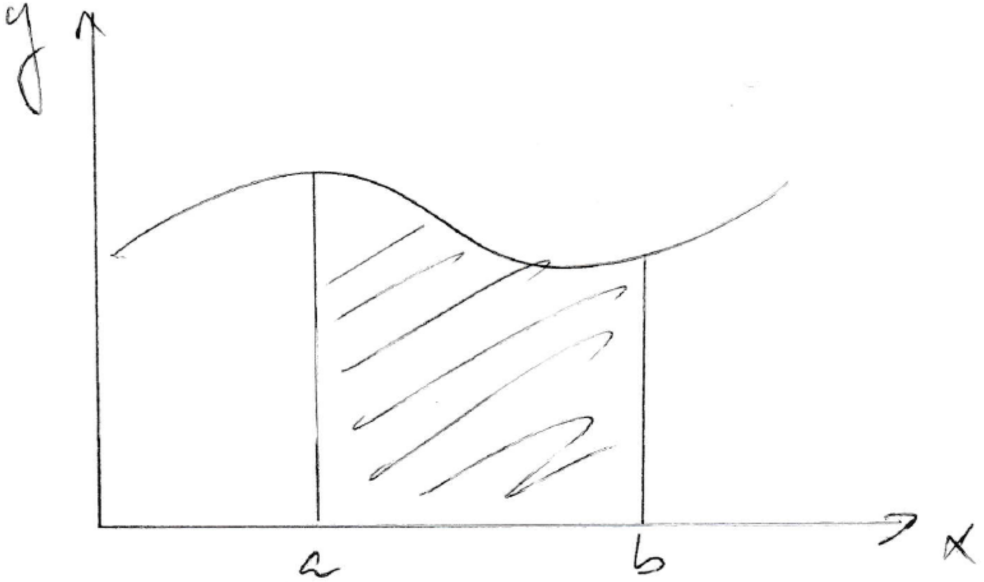
$$\Rightarrow f'(x) = \underset{u'}{2x} \cdot \underset{v}{e^{-x}} + \underset{u}{(x^2+1)} \cdot \underset{v'}{e^{-x} \cdot (-1)}$$

innere Ableitung

$$= 2x \cdot e^{-x} - (x^2+1)e^{-x}$$

$$= e^{-x}(2x - x^2 - 1)$$

Integrale



$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Integrale

Bsp. $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \int_a^b x^3 \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_a^b$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4 = \frac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right)$

Partielle Integration

$$F(x) = u \cdot v - \int (u' \cdot v)\,dx$$
$$f(x) = u \cdot v'$$

Partielle Integration

Beispiel:

$$\int e^x \cdot (2-x^2)\,dx$$

$$= e^x \cdot (2-x^2) - \int e^x \cdot (-2x)\,dx$$

© abiweb

Partielle Integration

$$= e^x \cdot (2-x^2) + e^x \cdot 2x - \int 2 \cdot e^x \, dx$$

$$= e^x \cdot (2-x^2) + e^x \cdot 2x - 2 \cdot e^x + C$$

$$= e^x (2 - x^2 + 2x - 2) + C$$

$$= e^x (2x - x^2) + C$$

© abiweb

Substitution

$$\int x^2 \cdot e^{x^3}\, dx = ?$$

1.) Substituieren:

$$u = x^3$$

2.) „u nach x ableiten":

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

Substitution

3.) Umstellen nach dx:

$$dx = \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3x^2}\,du$$

4.) dx durch Faktor mal du ersetzen:

$$\rightarrow \int x^2 \cdot e^u \cdot \frac{1}{3x^2}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C^*$$

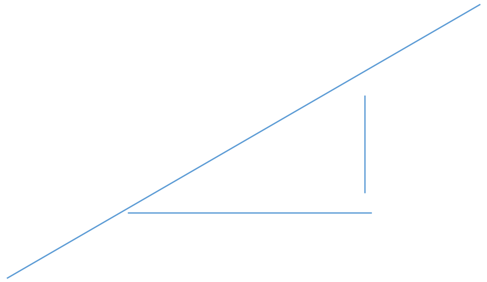
© abiweb

Substitution

5.) Rücksubstitution: $u = x^3$

$$\rightarrow \quad = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

Substitution



$$\int \tan(x)\,dx = ?$$

$$= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$

Substituieren: $u = \cos(x)$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin(x) \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{\sin(x)}\,du$$

Substitution

Einsetzen: $\rightarrow$ $= \int \underbrace{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}_{=u} \cdot \left(-\frac{1}{\sin(x)}\right) du$

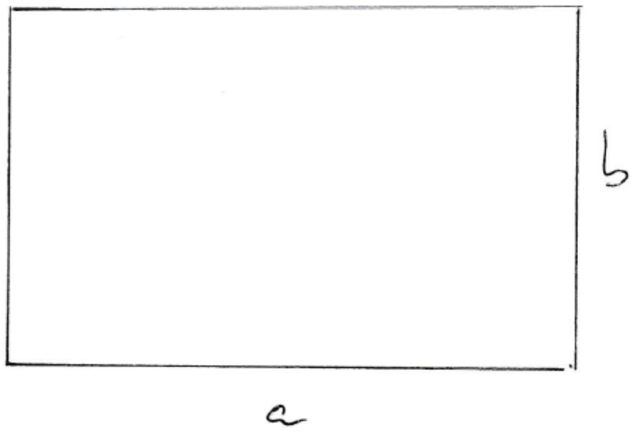
$= -\int \frac{1}{u}\, du$

$= -\ln|u| + c^{*}$

Rücksubstitution: $u = \cos(x)$

$\Rightarrow \int \tan(x)\, dx = -\ln|\cos(x)| + C$

Extremwertprobleme



Frage:

- Wie sind a und b zu wählen, damit der Flächeninhalt möglichst maximal wird?
- Gegeben: Umfang 16 m vorhanden

© abiweb

Extremwertprobleme

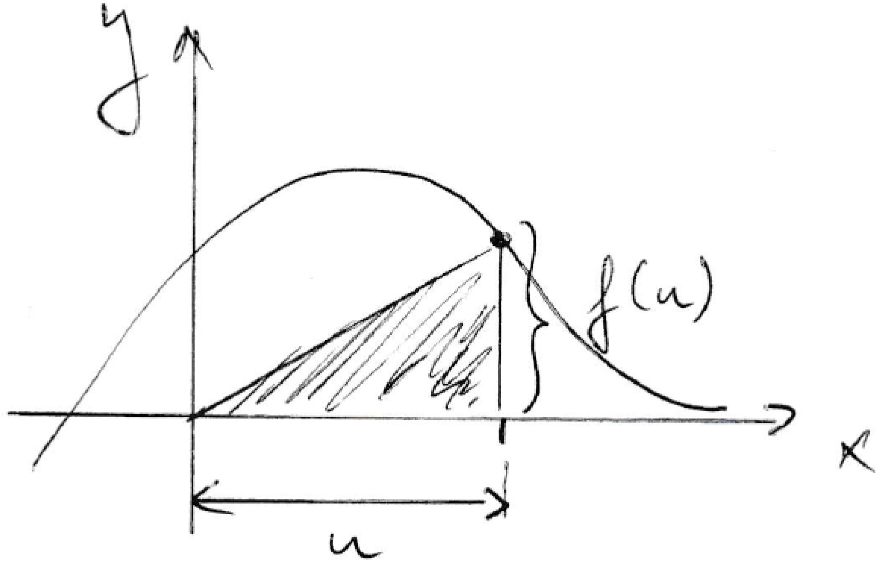
1. Was muss maximiert oder minimiert werden? $A = a \cdot b$ (HB)
   - „Hauptbedingung“
2. Was ist die Nebenbedingung? $U = 2a + 2b = 16$ (NB)
3. NB umstellen und nach einer Variable auflösen $a = 8 - 1b$
4. NB in HB einsetzen $A(b) = (8 - 1b) \cdot b$ (ZF)
5. Zielfunktion (ZF) aus 4. zusammenfassen $A(b) = 8b - b^2$
6. Extremwerte bestimmen $A'(b) = 8 - 2b = 0$
   $A''(b) = -2 < 0 \quad \rightarrow$ Maximum

$b = 4 \rightarrow a = 4$ (folgt daraus automatisch)

© abiweb

Extremwertprobleme

Bsp.:



$f(x) = (x+1)e^{-x}$

Extremwertprobleme

$$A = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$$

$| \; u = {}_{u}\text{opt. Wert}$"

$$A(u) = \frac{1}{2} u \cdot (u+1) \cdot e^{-u}$$

$$\rightarrow A(u) = \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} u\right) e^{-u}$$

Extremwertprobleme

$$\Rightarrow A'(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right) e^{-u} + \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u\right) \cdot \left(-e^{-u}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \left(u + \frac{1}{2}\right) e^{-u} - \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u\right) e^{-u}$$

$$= \left[\left(u + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u\right)\right] e^{-u}$$

$$= \left(u + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u\right) e^{-u}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\right) e^{-u} \overset{!}{=} 0$$

Extremwertprobleme

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0 \qquad \Big| :\left(-\frac{1}{2}\right) \hat{=} \cdot (-2)$$

$$\Rightarrow \quad u^2 - u - 1 \overset{!}{=} 0 \qquad \Big| \text{pq-Formel}$$

$$\rightarrow u_{1,2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{16}} \rightarrow \text{max.!}$$

daher +

$$\rightarrow A''(u) = \ldots \overset{!}{<} 0 \quad \text{(damit HP bestätigt!)}$$

dann in $A(u)$ und in $f(x)$ einsetzen!

mit $u = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{17}{16}} \ldots$

Beispielaufgabe

1 Die Funktion f mit $f(t) = 0{,}4t^3 - 6t^2 + 20t + 100$ gibt näherungsweise die Herzfrequenz eines Sportlers (in Schläge pro Minute) während einer Trainingseinheit auf einem Fahrrad an, wobei $t \in [0; 11]$ die Zeit in Minuten seit Beginn der Trainingseinheit angibt.

a) Berechnen Sie, wann die Herzfrequenz am höchsten war.

b) Berechnen Sie, wann die Herzfrequenz am stärksten abgenommen hat.

c) Berechnen Sie die mittlere Herzfrequenz während der Trainingseinheit innerhalb der ersten 11 Minuten.

Aus: Lambacher Schweizer

Beispielaufgabe

1 $f(t) = 0{,}4t^3 - 6t^2 + 20t + 100$

$\rightarrow f'(t) = 1{,}2t^2 - 12t + 20$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$\rightarrow f''(t) = 2{,}4t - 12$

© abiweb

Beispielaufgabe

a)
$$f'(t) = 1{,}2t^2 - 12t + 20 \overset{!}{=} 0 \qquad | : 1{,}2$$

$$\Leftrightarrow \; t^2 - 10t + 16\tfrac{2}{3} \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 16\tfrac{2}{3}} \qquad | \; 16\tfrac{2}{3} = \frac{50}{3}$$

$$= 5 \pm \sqrt{\frac{75}{3} - \frac{50}{3}}$$

$$\rightarrow t_1 = 2{,}11 \quad \vee \quad t_2 = 7{,}89$$

Beispielaufgabe

↳ Welche ?

→ $f''(t) = 2{,}4\,t_E - 12 \overset{!}{<} 0$

→ Einsetzen: $2{,}4 \cdot 2{,}11 - 12 = -6{,}94 < 0$ (HP)

$2{,}4 \cdot 7{,}89 - 12 = +6{,}94 > 0$ (TP)

→ $\underline{t_E = 2{,}11 \text{ min}}$ ist richtig !

Beispielaufgabe

$$\rightarrow f(2{,}11) = 0{,}4 \cdot (2{,}11)^3 - 6 \cdot (2{,}11)^2 + 20 \cdot (2{,}11) + 100$$

$$= \underline{\underline{119{,}2}} \rightarrow \text{Lok. M.}$$

$$f(0) = 100 \qquad f(11) = 126{,}4 \rightarrow \text{G. M.}$$

Beispielaufgabe

b) Wann ist das Gefälle am stärksten?

$\rightarrow f''(t) \overset{!}{=} 0$ (1. Abl. der 1. Abl.)

$\rightarrow f'''(t) \overset{!}{>} 0$ (größer 0, da Gefälle)

© abiweb

Beispielaufgabe

$$\Rightarrow f''(t) = 2{,}4t - 12 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 2{,}4t = 12$$

$$\Leftrightarrow t = 5$$

$$f'''(t) = 2{,}4 > 0 \quad \checkmark$$

$$\underline{\underline{t = 5\,\text{min}}}$$

Beispielaufgabe

c) mittlere Herzfrequenz:

$$\overline{f}(t) = \frac{1}{11} \int_0^{11} f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{11} \cdot \left[0{,}1 \cdot t^4 - 2t^3 + 10t^2 + 100t \right]_0^{11}$$

$$= \frac{1}{11} \cdot \left(0{,}1 \cdot 11^4 - 2 \cdot 11^3 + 10 \cdot 11^2 + 100 \cdot 11 \right)$$

$$= 101{,}1 \approx \underline{\underline{101}}$$