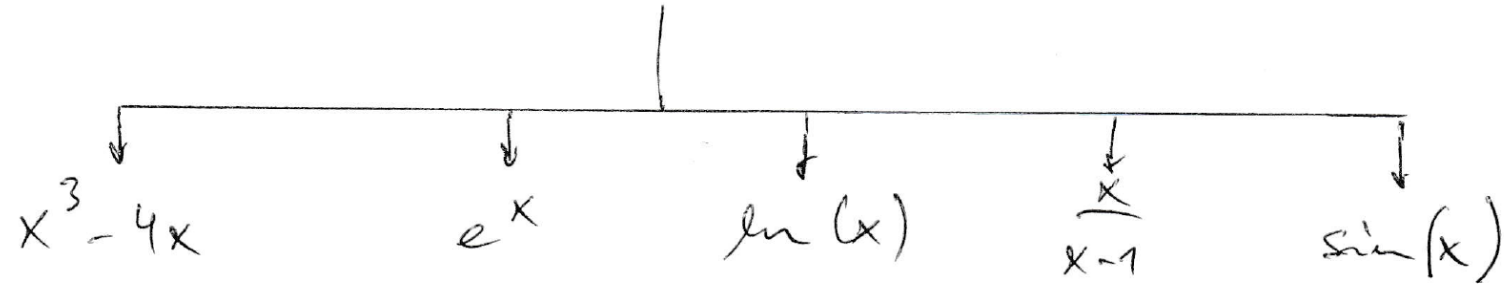


Mathematik - Analysis

Analysis - Komplettübersicht

- Interpretation im Sachzusammenhang
- Ablauf Kurvendiskussion
- Ableiten → Was bringt es?
- Integrieren → Wozu?
- Besonderes
 - Tangenten, Linearisieren
 - Extremwertproblem, Optimierung

Analysis - Komplettübersicht



- Ganzrationale Funktionen
- Exponentialfunktionen, e-Funktionen
- Logarithmische Funktionen
- Gebrochen rationale Funktionen
- Trigonometrische Funktionen

Kurvendiskussion $f(x) = \dots$

- Definitionsbereich D , Wertebereich W
- Verhalten an den Rändern von D ($\lim_{x \rightarrow \infty} (\dots)$)
- Symmetrieregeln (Punkt- / Achsensymmetrie?)
- Achsenschnittpunkte (Nullstellen, y-Achsenabschnitt)
- Extrempunkte (Extremstellen, Hoch- oder Tiefpunkt?)
- Wendepunkte, Krümmungsverhalten
- Zeichnen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{AS: } f(-x) = f(x) \\ \rightarrow x^4 - x^2 + 1 = f(x)$$

$$\text{PS: } (-f(x)) = f(-x) \\ \rightarrow x e^{x^2} = f(x)$$

Definitionsbereich D , Wertebereich W

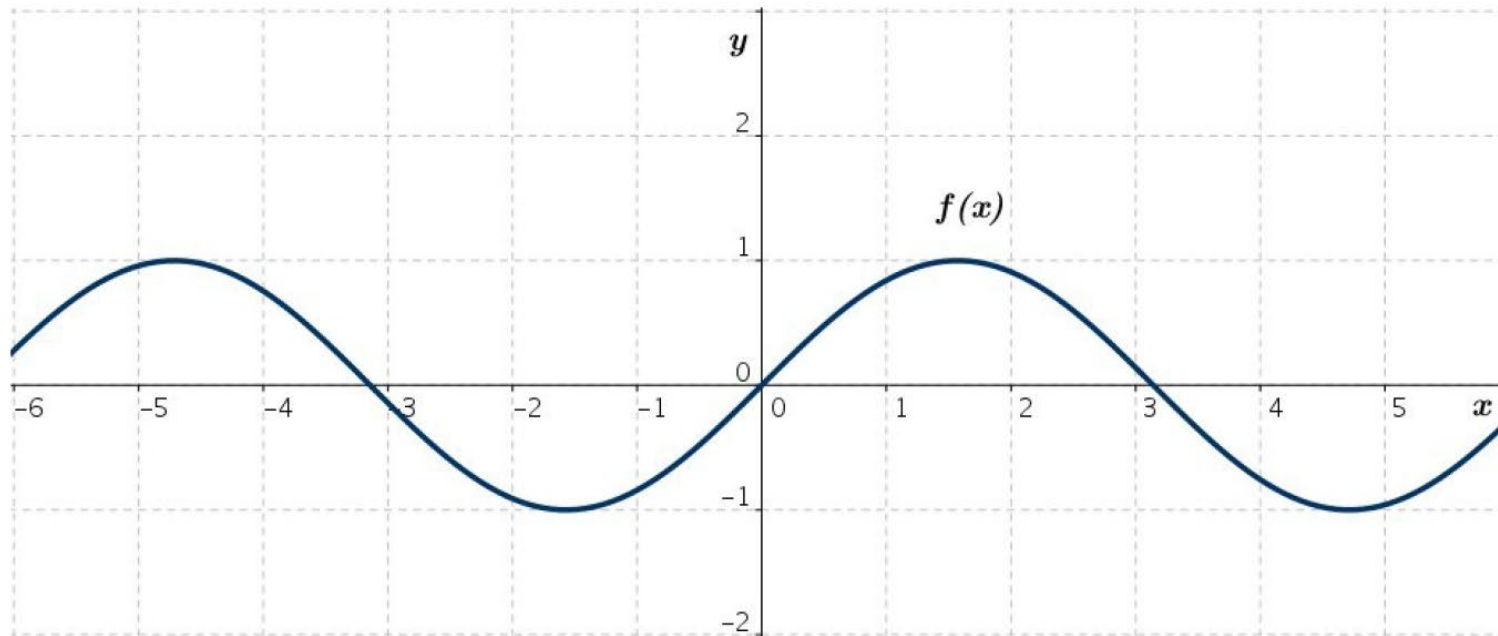
Definitionsbereich D :

- Definitionsbereich einer Funktion ist die Menge aller x -Werte, für die die Funktion definiert ist

Wertebereich W :

- Wertebereich einer Funktion ist die Menge aller y -Werte der Funktion

Definitionsbereich D , Wertebereich W

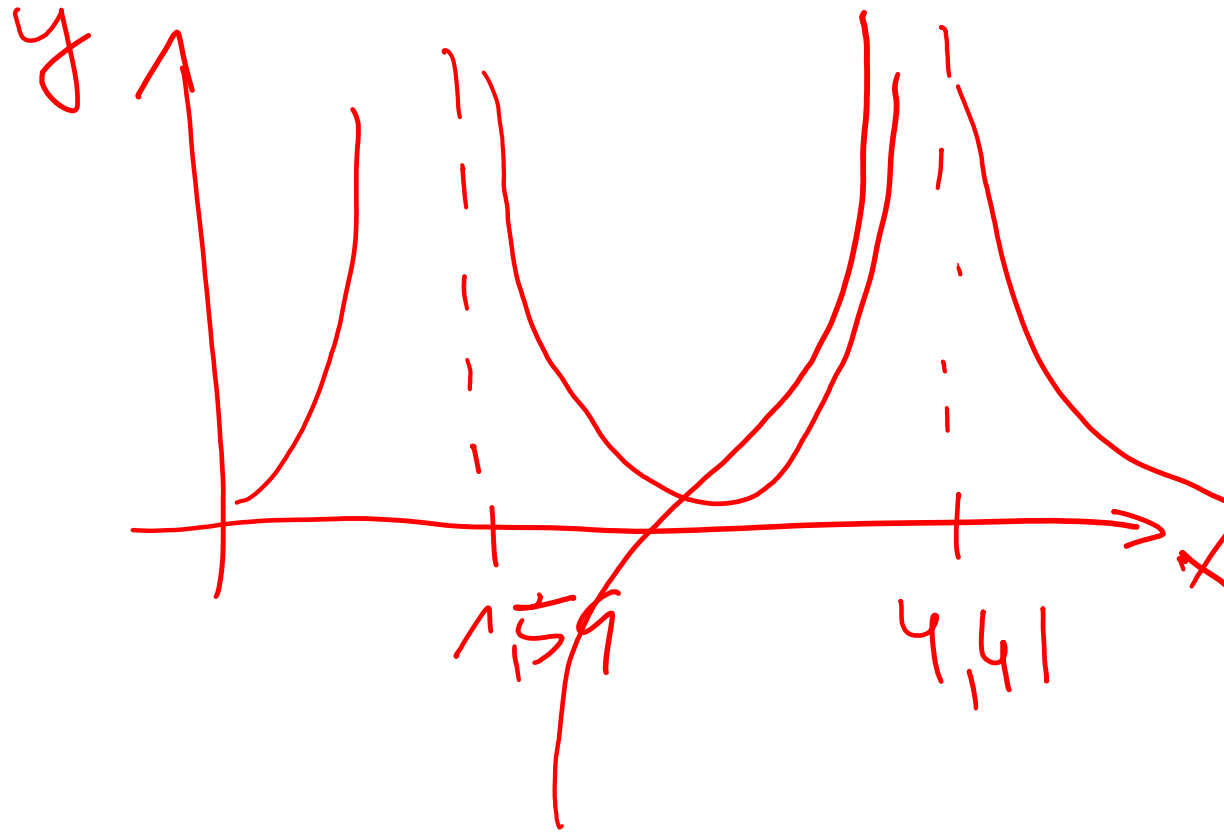


$$f(x) = \sin x, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = [-1, 1]$$

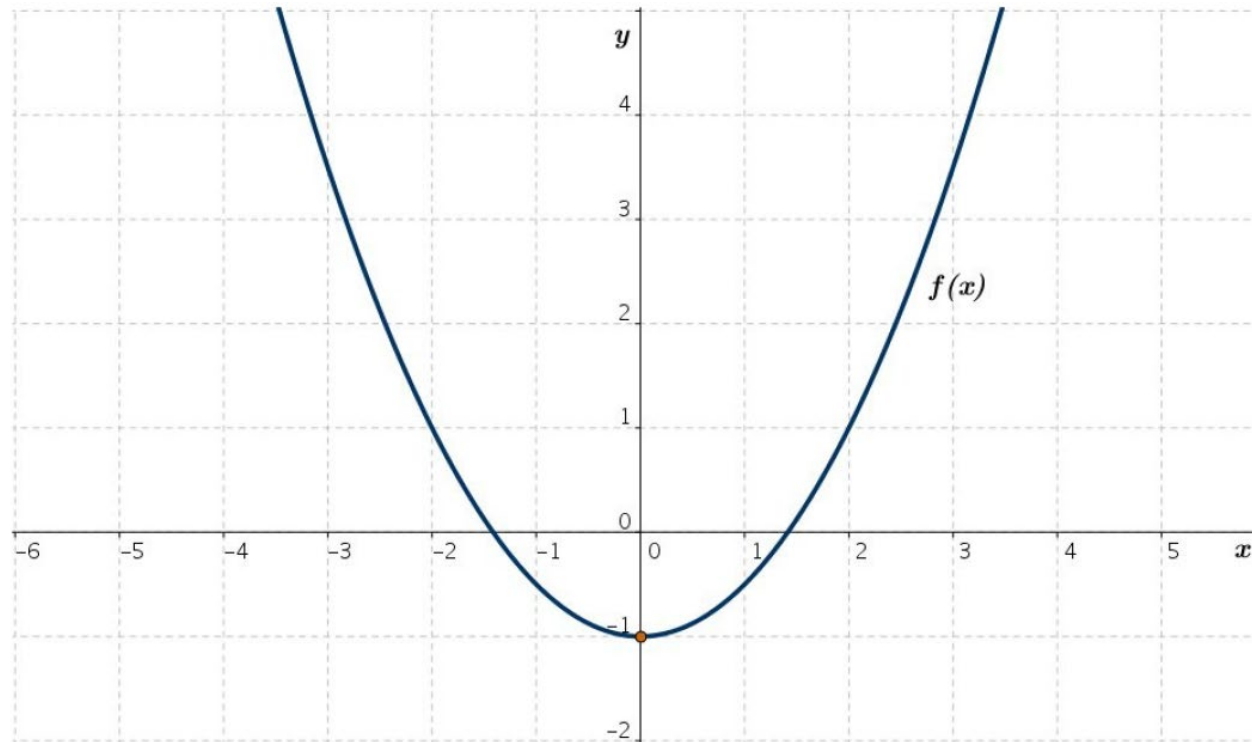
Definitionsbereich D , Wertebereich W

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 7}$$

$$x_1 = 1,59$$
$$x_2 = 4,41$$



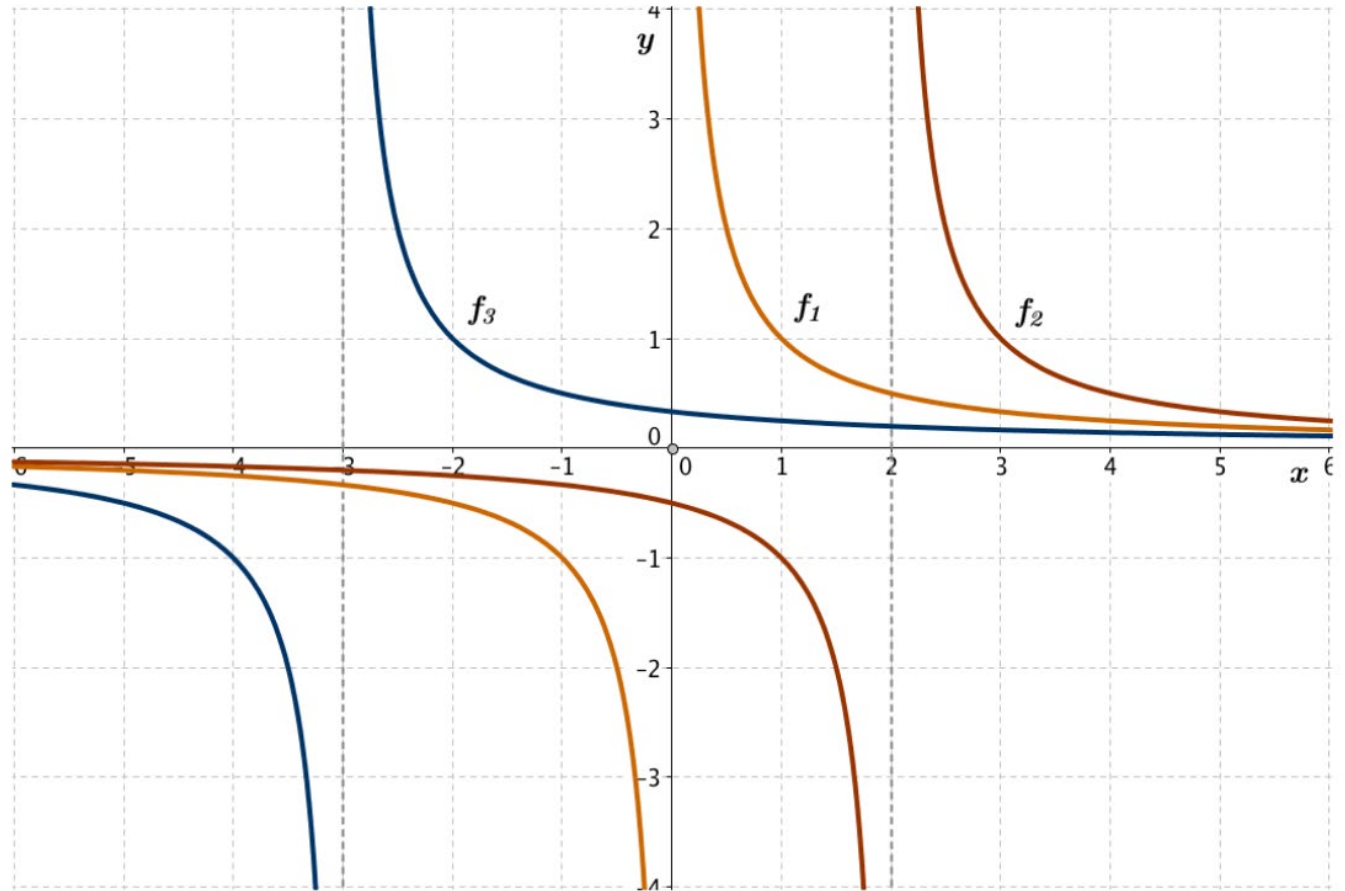
Definitionsbereich D , Wertebereich W



$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 1, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = [-1, \infty)$$

Definitionsbereich D , Wertebereich W

Gebrochen rationale Funktionen:



Definitionsbereich D , Wertebereich W

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$x = 0$ ist eine sogenannte **Definitionslücke**. An dem Punkt ist die Funktion nicht definiert!

$$f_2(x) = \frac{1}{x - 2}, \quad x \neq 2,$$

$$D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad W(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x + 3}, \quad x \neq -3,$$

$$D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, \quad W(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Verhalten an den Rändern - ganzrationale Funktionen

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 100$$

$\downarrow$!!! $\uparrow$!! $\uparrow$ +∞ !
 $-\infty$!! $-\infty$!! $+\infty$!

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 \left(\frac{\cancel{2x^3}}{\cancel{x^3}} - \frac{\cancel{4x^2}}{\underbrace{\cancel{x^3}}_0} - \frac{\cancel{x}}{\underbrace{\cancel{x^2}}_0} + \frac{100}{\underbrace{\cancel{x^3}}_0} \right) = -\infty$$

$$\frac{1}{x} \uparrow \infty$$

⇒ Welche Funktion wächst am schnellsten?

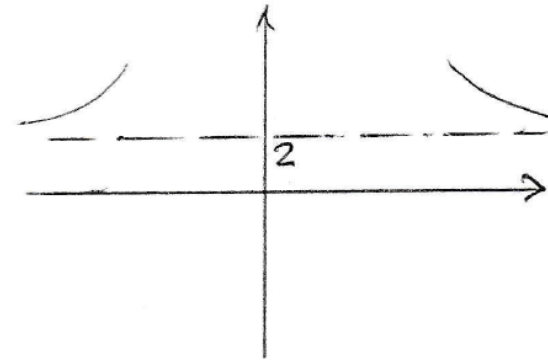
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\dots \right) = +\infty$$

Verhalten an den Rändern – gebrochen rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x}$$

$N(x) > Z(x) \rightarrow 0$
Nenner Zähler

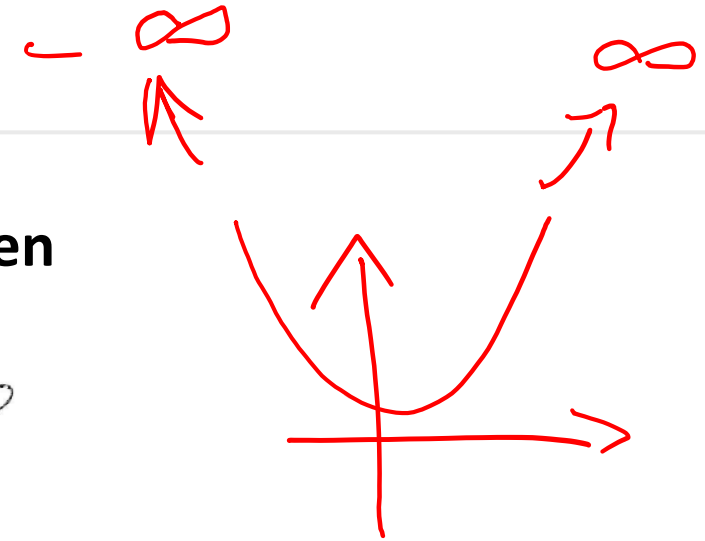
$$g(x) = \frac{2x}{x - 10}$$



↳ Polynomdivision:

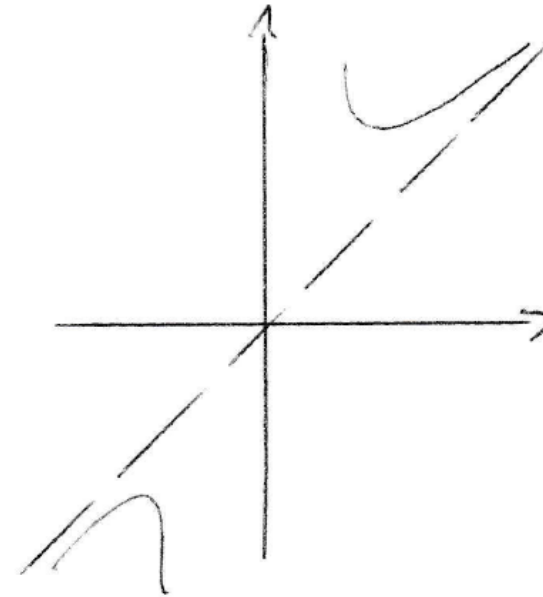
$$(2x) : (x - 10) = 2 + \frac{20}{x - 10} \rightarrow \text{waagerechte Asymptote}$$

$$\begin{array}{r} (2x) : (x - 10) = 2 + \frac{20}{x - 10} \\ -(2x - 20) \\ \hline 20 \end{array}$$

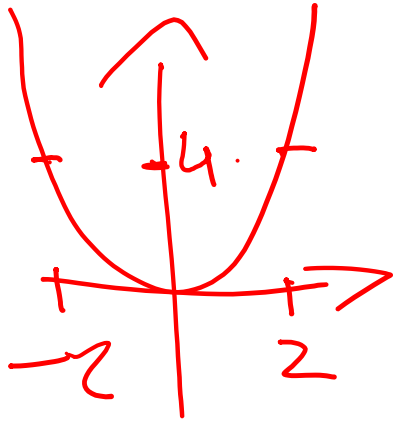


Verhalten an den Rändern – gebrochen rationale Funktionen

$$h(x) = \frac{5x^3}{x^2 - 2}$$
$$\hookrightarrow (5x^3) : (x^2 - 2) = 5x + \frac{10x}{x^2 - 2}$$
$$\begin{array}{r} - (5x^3 - 10x) \\ \hline + 10x \end{array}$$

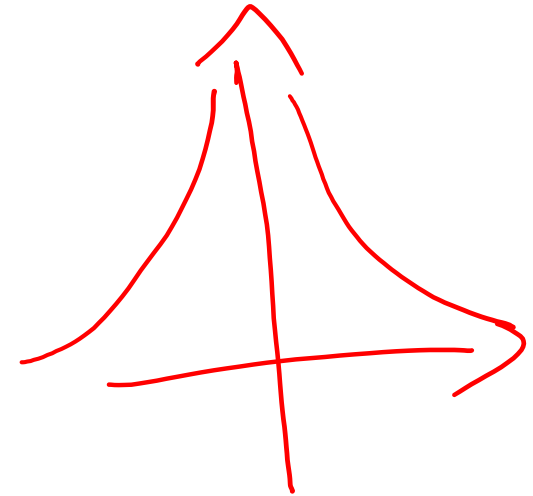


Achsensymmetrie / Punktsymmetrie



$$f(x) = x^4 + x^2 \quad ?$$

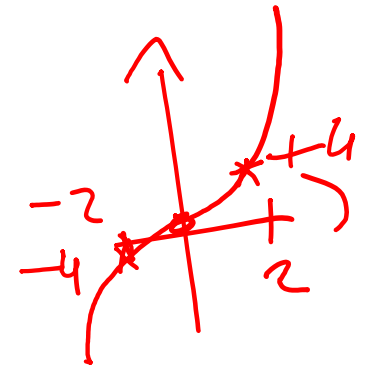
$$\Rightarrow f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x) \quad \checkmark \quad \text{A.S.}$$



$$f(x) = x^3 + 2x \quad ?$$

$$\Rightarrow f(-x) = (-x)^3 + 2 \cdot (-x) = -x^3 - 2x \neq f(x) \quad !$$

$$-f(x) = -(x^3 + 2x) = -x^3 - 2x = f(-x) \quad \text{P.S.} \quad \checkmark$$



Achsensymmetrie / Punktsymmetrie

I
II

$$f(x) = x \cdot e^{x^2}$$

$$f(-x) = (-x) \cdot e^{(-x)^2} = -x \cdot e^{x^2} \neq f(x) !$$

$$-f(x) = -(x \cdot e^{x^2}) = -x \cdot e^{x^2} = f(-x) \quad \text{P.S.} \checkmark$$

Logarithmus

$$\begin{aligned} 10^x &= 5 & 10^{\lg(5)} &= 5 \\ x &= \log_{10}(5) & &= \lg(5) \end{aligned}$$

Logarithmus

$$(a^{\lg(b)})^x = a^{x \cdot \lg(b)}$$

$$\begin{aligned} a^x &= z \\ (10^{\lg(a)})^x &= 10^{\lg(z)} \\ \cancel{10}^{x \cdot \lg(a)} &= \cancel{10}^{\lg(z)} \\ x \cdot \lg(a) &= \lg(z) \\ \Rightarrow x &= \frac{\lg(z)}{\lg(a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^x &= 22 \\ x &= \log_5(22) \\ x &= \frac{\lg(22)}{\lg(5)} \end{aligned}$$

Logarithmus

$$e^x = 13 \quad | \ln \Rightarrow \ln(e^x) = e^{\ln(x)} = \ln(13)$$

$$e^x = z$$

$$\ln(e^x) = \ln(z)$$

$$\hookrightarrow x = \ln(z)$$

$$\ln(2e^{3x}) = \ln(2) + 3x$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(e^x) = x \cdot \cancel{\ln(e)} = x$$

$$\ln(a^b) = b \cdot \ln a$$

Ableiten

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + 4$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 \quad \text{"-1"} \\ &\downarrow \\ f'(x) &= 6x^5 \quad \text{"-1"} \\ &\downarrow \\ f''(x) &= 30x^4 \end{aligned}$$

Ableiten

$$\begin{aligned} F(x) &= 6 \cdot \frac{1}{6} x^6 \quad \text{"+1"} \\ &\uparrow \\ f'(x) &= 30 \cdot \frac{1}{5} x^5 = 6x^5 \quad \text{"+1"} \\ &\uparrow \\ f''(x) &= 30 \cdot x^4 \end{aligned}$$

"Aufbitten"
= Integrieren

Ableiten

$$\begin{aligned} f(x) &= 12x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 2x^2 + x + 10 \\ f'(x) &= 60x^4 + 24x^3 + 21x^2 + 4x + 1 \\ f''(x) &= 240x^3 + 72x^2 + 42x + 4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Handwritten red annotations: Red circles around $12x^5$, $6x^4$, and $7x^3$ in the first line. Red arrows pointing down from each term in the first line to the corresponding term in the second line. Red arrows pointing down from each term in the second line to the corresponding term in the third line. A red arrow pointing down from the constant term 10 in the first line to a red 0 in the second line. A red arrow pointing down from the constant term 1 in the second line to a red 0 in the third line.

Ableiten

$$f(x) = \frac{1}{x^1} = x^{-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Ableiten

$$f(x) = \sqrt{2x} = (2x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow -1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{(2x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$f(x) = 3\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = (3 \cdot x^{\frac{1}{2}})' = 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$e^{(x^2)} \neq (e^x)^2$$

Ableiten

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 2x^2 - x} = (x^3 + 2x^2 - x)^{-1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= - (x^3 + 2x^2 - x)^{-2} \cdot (3x^2 + 4x - 1) \\ &= - \frac{3x^2 + 4x - 1}{(x^3 + 2x^2 - x)^2} = \frac{1 - 4x - 3x^2}{(x^3 + 2x^2 - x)^2} \end{aligned}$$

f' innere

Ableiten

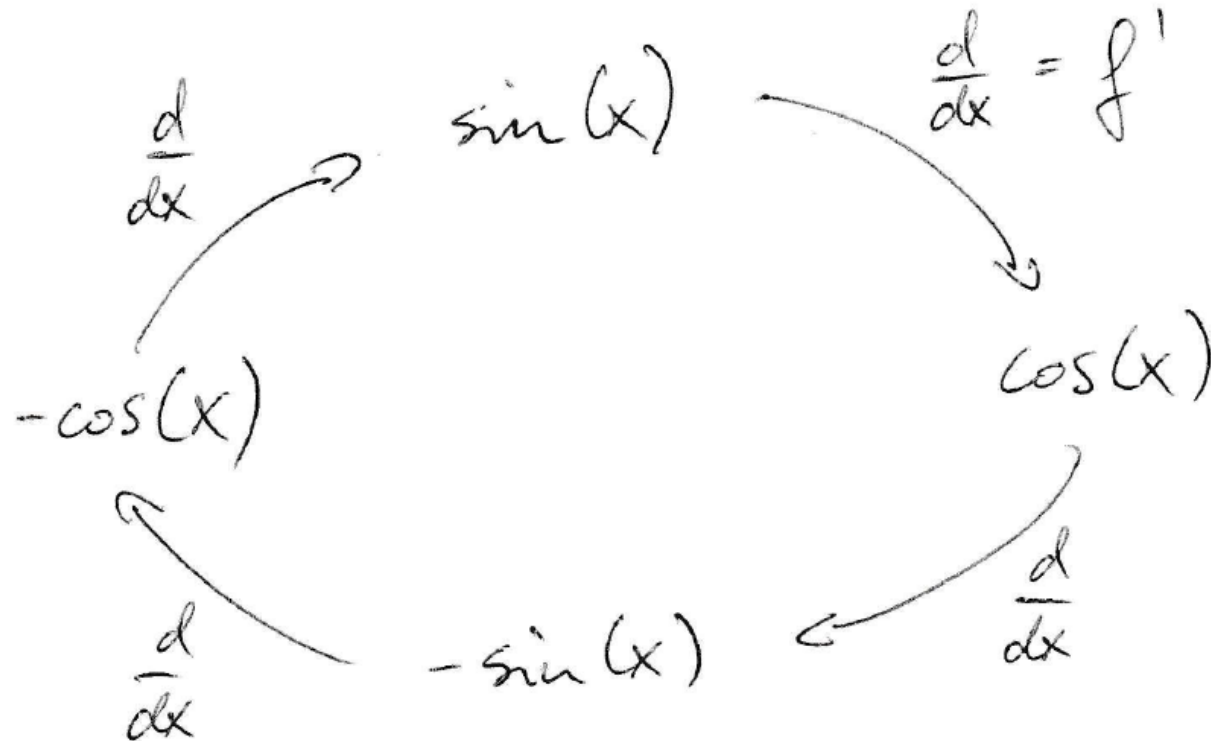
$$f(t) = 10 e^{(0,4t - 0,5kt)}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 10 \cdot e^{(0,4t - 0,5kt)} \cdot (0,4 - 0,5k) \\ &= (4 - 5k) e^{0,4t - 0,5kt} \end{aligned}$$

$$f'(e^{ax}) = e^{ax} \cdot a$$

Ableiten

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$





$$\frac{1}{\cos(x)} = [\cos(x)]^{-1}$$

$$\sin(x)^2 = \sin^2(x)$$

Ableiten

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \cdot \cos(x)^{-1}$$

$$f'(x) = \cancel{\sin(x)} \cdot (-\cos(x)^{-2}) \cdot (-\sin(x))$$

$$+ \cos(x) \cdot \cos(x)^{-1}$$

$$= -\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} +$$

$$\frac{\cancel{\cos(x)}}{\cancel{\cos(x)}}$$

$$= \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} + \frac{\cos(x)^2}{\cos(x)^2}$$

$$= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)^2 + 1 = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}$$

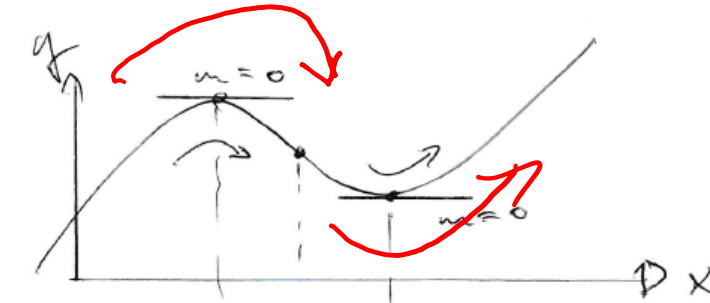
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$=$$

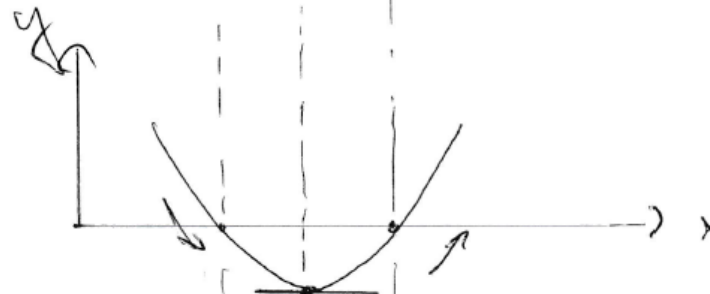
$$\frac{1}{\cos^2(x)}$$

Additionstheorem

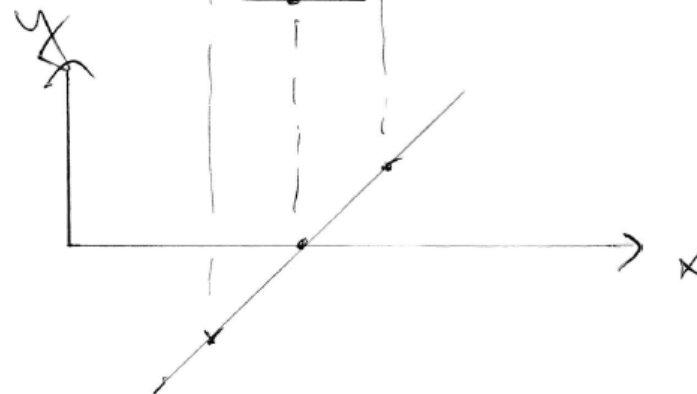
Ableiten



$$f(x)$$



$$f'(x) \stackrel{!}{=} 0$$



$$f''(x) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

Extremwerte

$$f(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 6x - 6$$

$$f''(x) = 6$$

$$\text{Notwendige Bed.: } f'(x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = 6 \rightarrow x_E = 1$$

Extremwerte

Hinreichende Bed.: $f'(x_E) \stackrel{!}{=} 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

wobei gilt: $f''(x_E) < 0 \rightarrow \text{Maximum}$

$f''(x_E) > 0 \rightarrow \text{Minimum}$

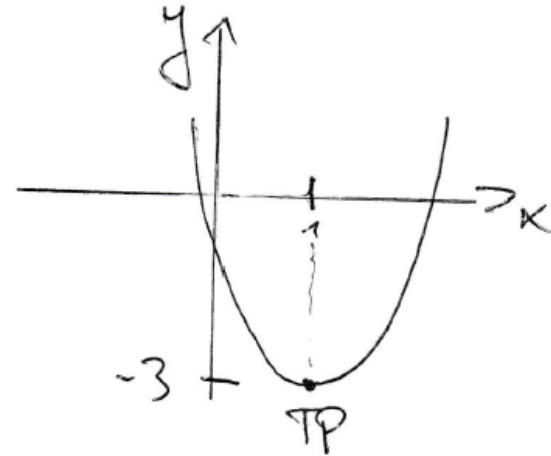
$\rightarrow f''(1) = 6 > 0 \rightarrow \underline{\text{Minimum}}$

Extremwerte

$$f(1) = 3 \cdot (1)^2 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3$$

→ Tiefpunkt TP (1 | -3)

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$

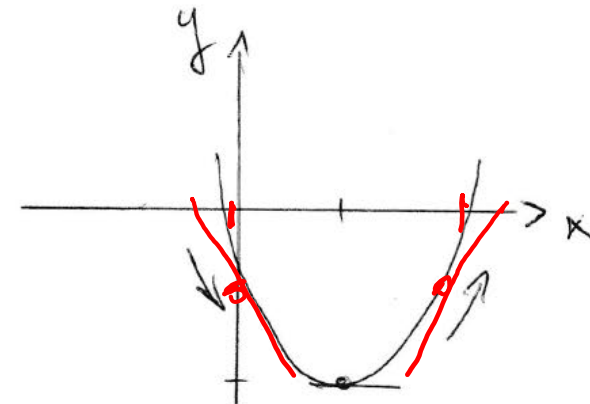


Extremwerte

Alternativ: Vorzeichenwechselmethode

→ Hinweisende Bed.: „VZW-M“

x	0	1	2
$f'(x)$	-6	0	6
	⊖		⊕



Wendepunkte

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x$$

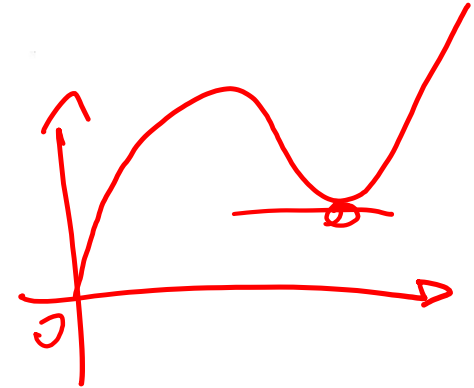
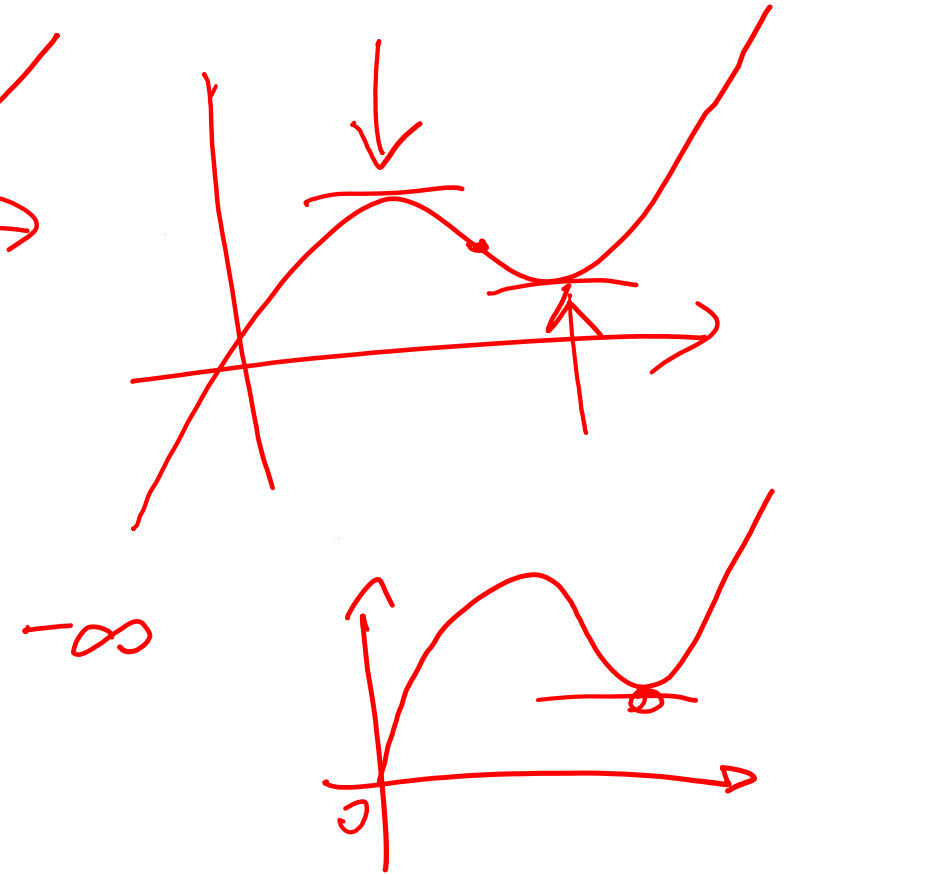
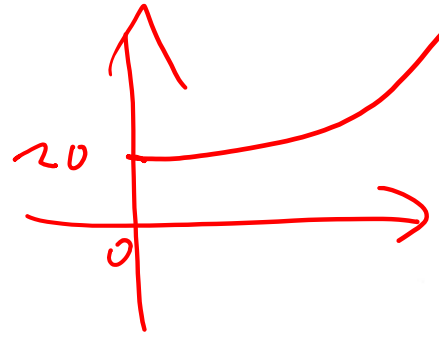
$$f''(x) = 12x - 12$$

$$f'''(x) = 12$$

Notw. Bed.: $f''(x) \stackrel{!}{=} 0$

$$\rightarrow 12x - 12 = 0$$

$$\rightarrow 12x = 12 \Leftrightarrow x_w = 1$$



Wendepunkte

Hinr. Bed.: $f''(x_w) \stackrel{!}{=} 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$

wobei gilt: $f'''(x_w) < 0 \rightarrow \text{L. - R. - W.}$

$f'''(x_w) > 0 \rightarrow \text{R. - L. - W.}$



$$f'''(1) = 12 > 0$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 = -4 \quad W(1 | -4)$$

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

Produktregel

Beispiel: $f(x) = 5x^3 \cdot \sin(x)$

$$u = 5x^3 \qquad v = \sin(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{15x^2}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_v + \underbrace{5x^3}_u \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}$$

Produktregel

$$f(x) = \underbrace{(x^2+1)}_u \underbrace{e^{-x}}_v$$

$$(x^2+1)e^{-x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{e^{-x}}_v + \underbrace{(x^2+1)}_u \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'} \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{innere Ableitung}}$$

innere Ableitung

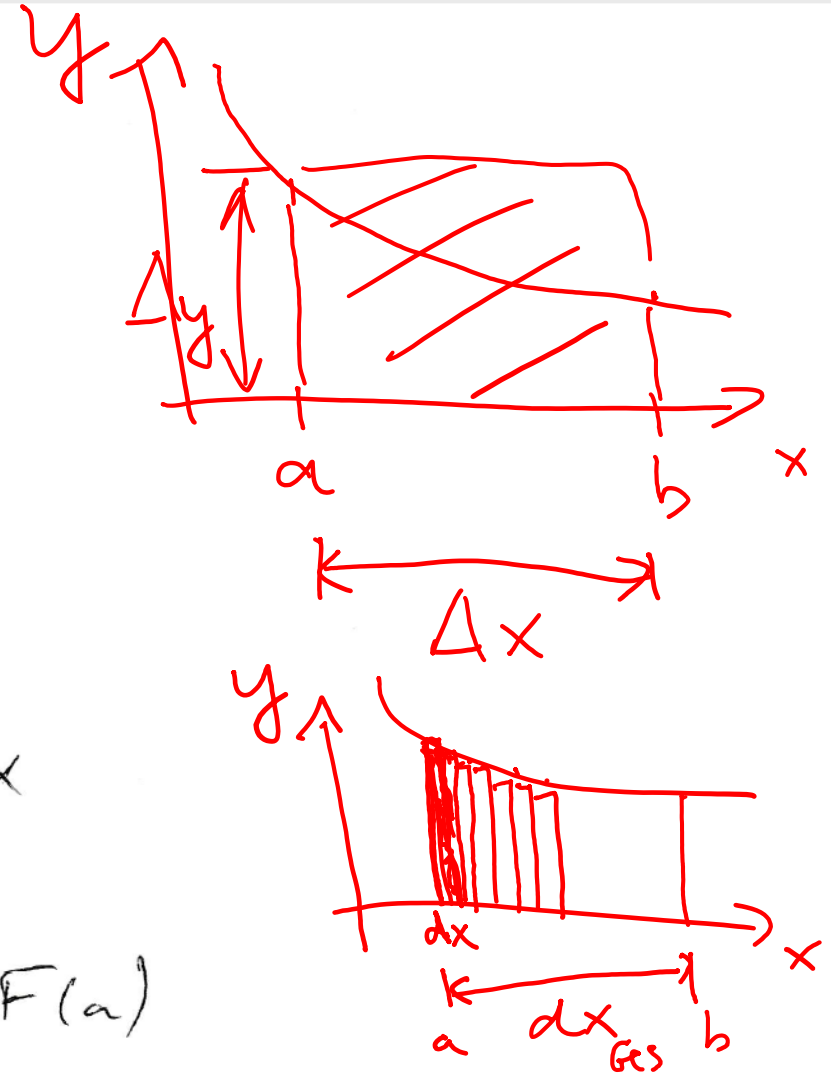
$$= 2x \cdot e^{-x} - (x^2+1)e^{-x}$$

$$= e^{-x}(2x - x^2 - 1)$$

Integrale

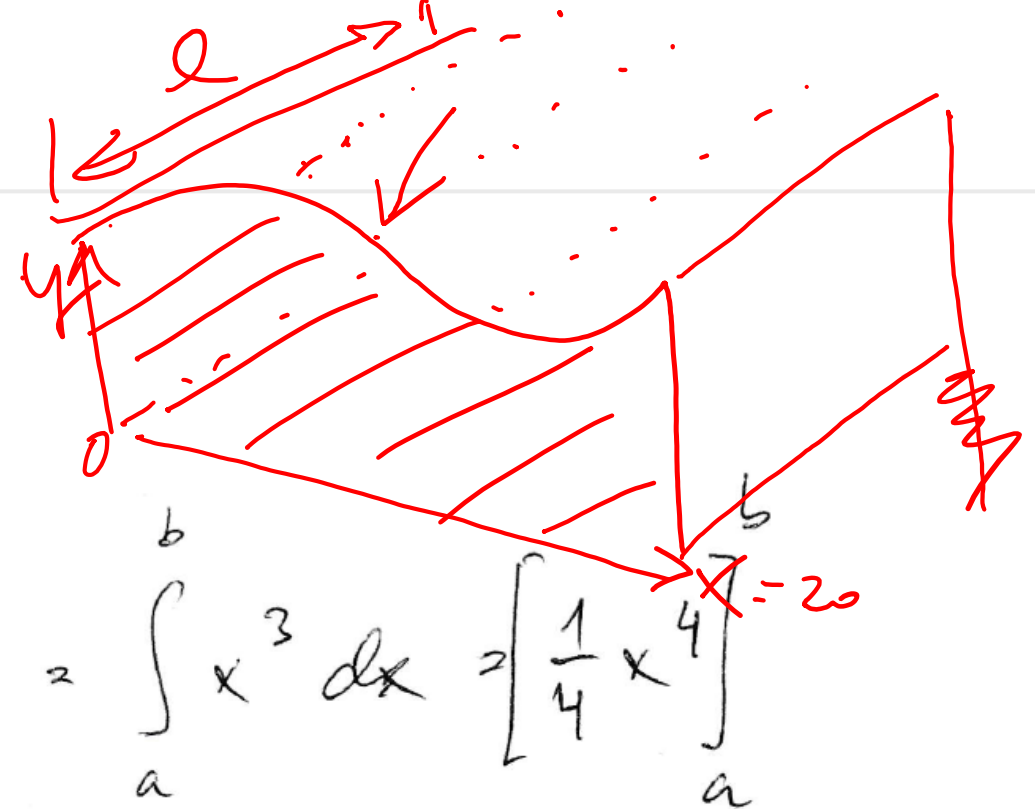


$$\int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$





Integrale

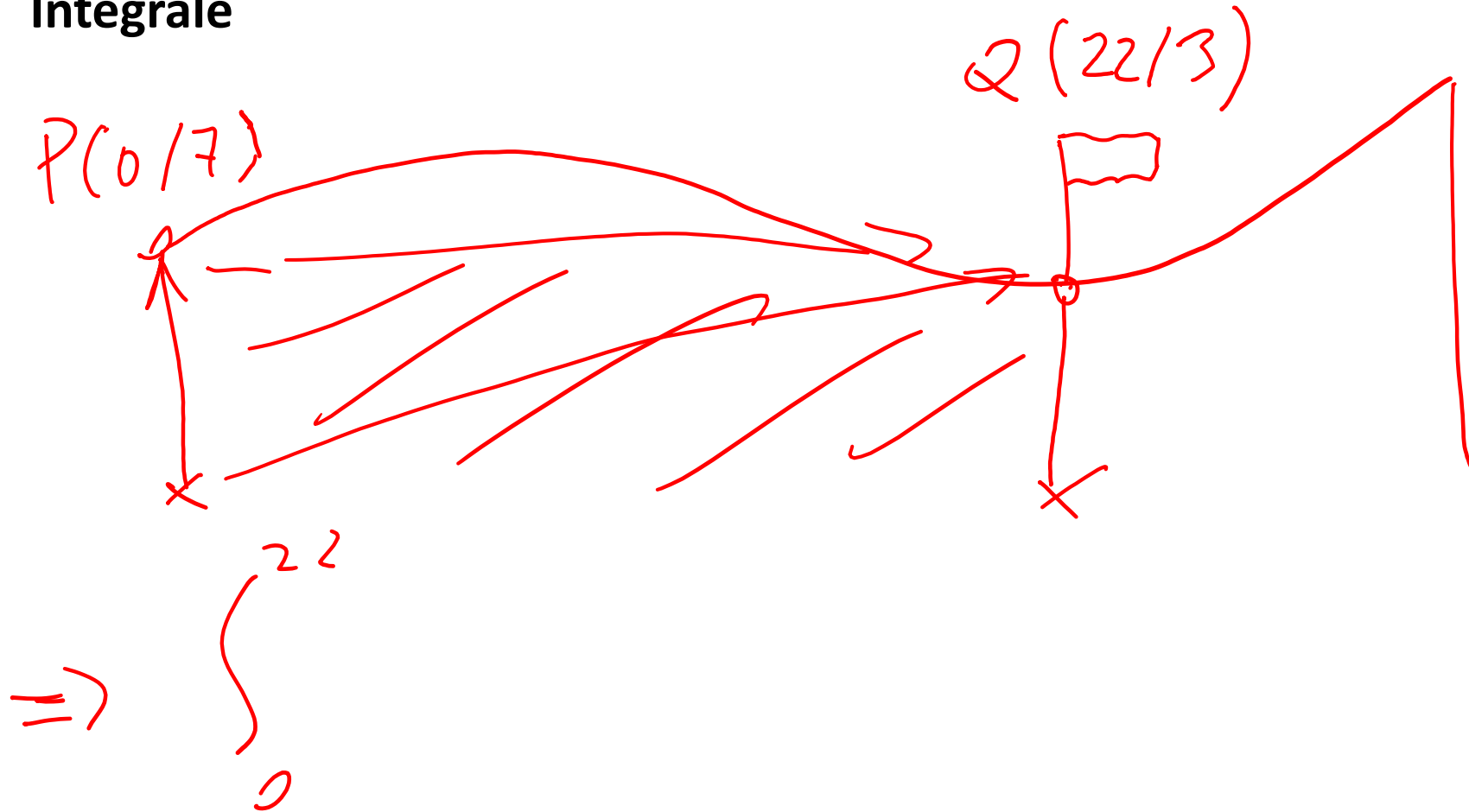


Bsp. $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \int_a^b x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_a^b$

$$\rightarrow F(x) = \frac{1}{4} b^4 - \frac{1}{4} a^4 = \frac{1}{4} (b^4 - a^4)$$

$$\int_a^b x^3 \dots dx \cdot l = V$$

Integrale



Partielle Integration

$$f(x) = e^x \cdot \sin(x)$$

$$F(x) = u \cdot v - \int (\underline{u'} \cdot v) dx$$

$$f(x) = \underline{u} \cdot \underline{v'}$$

$$f(x) = \overset{v'}{x} \cdot \overset{u}{\ln(x)}$$

$$\text{oder} = \underset{u}{x^5} \cdot \underset{v'}{e^x}$$

Partielle Integration

Beispiel:

$$\int \underbrace{e^x}_{v'} \cdot \underbrace{(2-x^2)}_u dx$$
$$= \underbrace{e^x \cdot (2-x^2)}_v - \int \underbrace{e^x}_v \cdot \underbrace{(-2x)}_{u'} dx$$

nen $e^x = v'$ $-2x = u$

Partielle Integration

$$-2 \int e^x dx$$

$$\begin{aligned} &= \underline{e^x \cdot (2-x^2)} + \left[\underset{\substack{\downarrow v \\ e^x}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow u \\ 2x}}{2x} - \int \underset{\substack{\text{u'} \\ 2}}{2} \cdot \underset{\substack{\text{v} \\ e^x}}{e^x} dx \right] \\ &= \underline{e^x} \cdot \underline{(2-x^2)} + \underline{e^x} \cdot 2x - \underline{2 \cdot e^x} + C \\ &= e^x \left[\cancel{2} - x^2 + 2x - \cancel{2} \right] + C \\ &= \underline{e^x (2x - x^2)} + C \end{aligned}$$

$$\int e^{(x^3)} dx = ?$$

Substitution

$$\int x^2 e^{x^3} dx = ?$$

1.) Substituieren:

$$u = x^3 \quad \leftarrow \text{nach } dx$$

2.) „u nach x ableiten“:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

↓
f'

Substitution

3.) Umstellen nach dx :

$$\textcircled{dx} = \frac{du}{3x^2} = \textcircled{\frac{1}{3x^2}} du$$

4.) dx durch Faktor mal du ersetzen:

$$\rightarrow \int \cancel{x^2} \cdot \textcircled{e^u} \cdot \textcircled{\frac{1}{3x^2}} du$$

$$u = x^3$$

zum Subst.

$$= \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C^*$$

Substitution

5.) Rücksubstitution: $u = x^3$

$$\rightarrow = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

Substitution

$$\int \tan(x) dx = ?$$

$$= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$$

Substituieren: $u = \cos(x)$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin(x) \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{\sin(x)} du$$

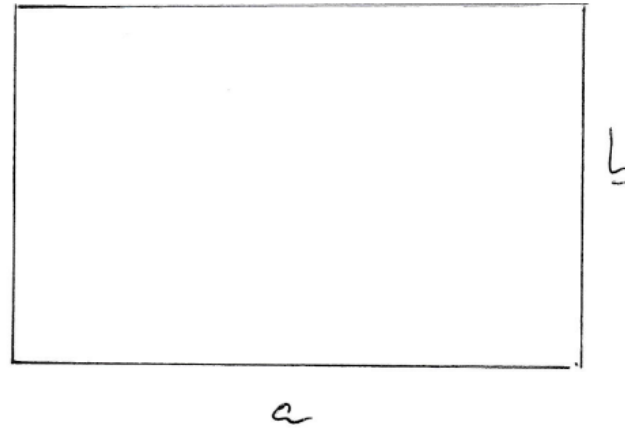
Substitution

$$\begin{aligned}\text{Einsetzen: } &\rightarrow = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \left(-\frac{1}{\sin(x)}\right) du \\ &\quad \quad \quad \searrow = u \\ &= - \int \frac{1}{u} du \\ &= -\ln|u| + C^*\end{aligned}$$

$$\text{Rücksubstitution: } u = \cos(x)$$

$$\Rightarrow \int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

Extremwertprobleme



Frage:

- Wie sind a und b zu wählen, damit der Flächeninhalt möglichst maximal wird?
- Gegeben: Umfang 16m vorhanden

Extremwertprobleme

1. Was muss maximiert oder minimiert werden?
➤ „Hauptbedingung“

$$A = a \cdot b \quad (\text{HB})$$

2. Was ist die Nebenbedingung?

$$U = 2a + 2b = 16 \quad (\text{NB})$$

3. NB umstellen und nach einer Variable auflösen

$$a = 8 - 1b$$

4. NB in HB einsetzen

$$A(b) = (8 - 1b) \cdot b \quad (\text{ZF})$$

5. Zielfunktion (ZF) aus 4. zusammenfassen

$$A(b) = 8b - b^2$$

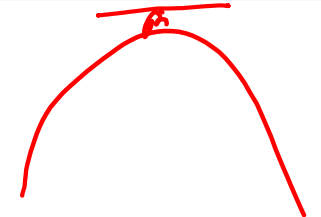
6. Extremwerte bestimmen

$$A'(b) = 8 - 2b = 0$$

$$A''(b) = -2 < 0 \quad \rightarrow \quad \text{Maximum}$$

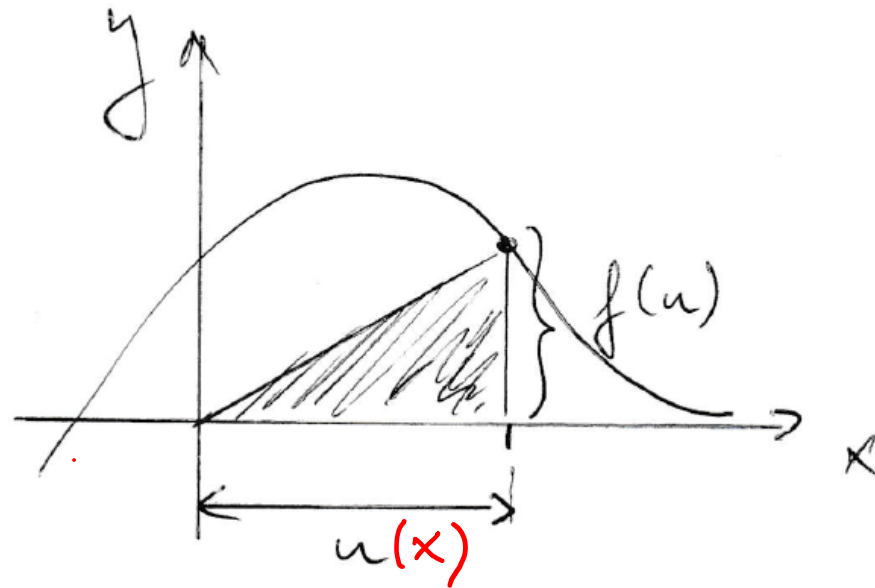
$$b = 4 \rightarrow a = 4$$

(folgt daraus automatisch)



Extremwertprobleme

Bsp.:



$$f(x) = (x+1)e^{-x}$$

Extremwertprobleme

f/13

$$A = \frac{1}{2} \cdot \underline{u} \cdot \underline{f(u)}$$

$$A(u) = \frac{1}{2} u \cdot (u+1) \cdot e^{-u}$$

$$\rightarrow A(u) = \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} u \right) e^{-u}$$

| $u = u_{\text{opt. Wert}}$

Extremwertprobleme

$$\Rightarrow A'(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right) e^{-u} + \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u\right) \cdot (-e^{-u}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \left(u + \frac{1}{2}\right) e^{-u} - \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u\right) e^{-u}$$

$$= \left[\left(u + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u\right) \right] e^{-u}$$

$$= \left(u + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u\right) e^{-u}$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\right)}_{\stackrel{!}{=} 0} e^{-u} \stackrel{!}{=} 0$$

e^{-u} kann
nicht 0
werden!

Extremwertprobleme

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0 \quad | :(-\frac{1}{2}) \hat{=} \cdot (-2)$$

$$\Rightarrow u^2 - u - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad | \text{pq-Formel}$$

$$\rightarrow u_{1,2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + 1} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{14}} \rightarrow \text{max!} \quad \text{daher } +$$

$$\rightarrow A''(u) = \dots \stackrel{!}{<} 0 \quad (\text{damit HP bestätigt!})$$

dann in $A(u)$ und in $f(x)$ einsetzen!

$$\text{mit } u = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{17}{14}} \dots$$

Beispielaufgabe



1 Die Funktion f mit $f(t) = 0,4t^3 - 6t^2 + 20t + 100$ gibt näherungsweise die Herzfrequenz eines Sportlers (in Schläge pro Minute) während einer Trainingseinheit auf einem Fahrrad an, wobei $t \in [0; 11]$ die Zeit in Minuten seit Beginn der Trainingseinheit angibt.

- a) Berechnen Sie, wann die Herzfrequenz am höchsten war.
- b) Berechnen Sie, wann die Herzfrequenz am stärksten abgenommen hat.
- c) Berechnen Sie die mittlere Herzfrequenz während der Trainingseinheit innerhalb der ersten 11 Minuten.

Beispielaufgabe

$$\textcircled{1} \quad f(t) = 0,4t^3 - 6t^2 + 20t + 100$$

$$\rightarrow f'(t) = 1,2t^2 - 12t + 20$$

$$\rightarrow f''(t) = 2,4t - 12$$

$$\textcircled{II} = \mathbb{R}$$

Beispielaufgabe

$$a) f'(t) = 1,2t^2 - 12t + 20 \stackrel{!}{=} 0$$

$$| : 1,2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 10t + 16\frac{2}{3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow t_{1,2} &= 5 \pm \sqrt{25 - 16\frac{2}{3}} \\ &= 5 \pm \sqrt{\frac{75}{3} - \frac{50}{3}} \end{aligned}$$

$$| 16\frac{2}{3} = \frac{50}{3}$$

$$\rightarrow t_1 = 2,11$$

$$\vee t_2 = 7,89$$

Beispielaufgabe

↳ Welche?

$$\rightarrow f''(t) = 2,4 \cdot t_E - 12 < 0$$

$$\rightarrow \text{Einsetzen: } 2,4 \cdot 2,11 - 12 = -6,94 < 0 \quad (\text{HP})$$

$$2,4 \cdot 7,89 - 12 = +6,94 > 0 \quad (\text{TP})$$

$t_E = 2,11 \text{ min}$ ist richtig!

Beispielaufgabe

Extra:

$$\rightarrow f(2,11) = 0,4 \cdot (2,11)^3 - 6 \cdot (2,11)^2 + 20 \cdot (2,11) + 100$$
$$= \underline{\underline{119,2}} \rightarrow \text{Lok. M.}$$

$$\underline{f(0) = 100}$$

X

$$\underline{f(11) = 126,4} \rightarrow \text{G. M.}$$

✓

↑

Beispielaufgabe

b) Wann ist das Gefälle am stärksten?

$$\rightarrow f''(t) \stackrel{!}{=} 0$$

(1. Abl. der 1. Abl.)

$$\rightarrow f''(t) \stackrel{!}{>} 0$$

(größer 0, da Gefälle)

Beispielaufgabe

$$\Rightarrow f'(t) = 2,4t - 12 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow 2,4t = 12$$
$$\Leftrightarrow \underline{t} = 5$$

$$f''(\underline{t}) = 2,4 > 0 \quad \checkmark$$

$$\underline{\underline{t = 5 \text{ min}}}$$

Beispielaufgabe

c) mittlere Herzfrequenz:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{11} \int_0^{11} f(t) dt \rightarrow$$

auch arithmetisches Mittel

$$= \frac{1}{11} \cdot \left[0,1 \cdot t^4 - 2t^3 + 10t^2 + 100t \right]_0^{11}$$

$$= \frac{1}{11} \cdot (0,1 \cdot 11^4 - 2 \cdot 11^3 + 10 \cdot 11^2 + 100 \cdot 11) = 0$$

$$= 101,1 \approx \underline{\underline{101}}$$