Mathematik - Analytische Geometrie

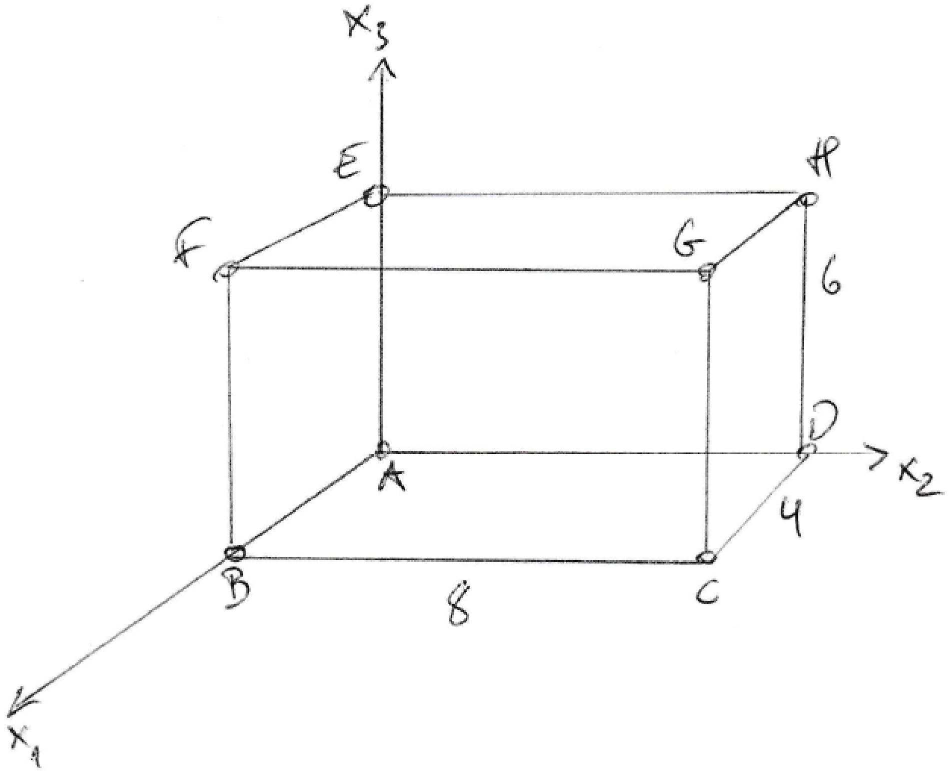
Vektorrechnung - Komplettübersicht

- Vektor- und Lagebeziehungen
- Orts- / Richtungsvektoren
- Länge eines Vektors
- Skalarprodukt
- Winkelberechnung
- Kreuzprodukt
- Mittelpunkt Strecke

Vektorrechnung - Komplettübersicht

- Abstand $(P|P)$, $(P|G)$, $(P|E)$, $(G|G)$, $(G|E)$
- Lage G/E, E/E
- Punktprobe P/G, P/E
- Parameterform einer Gerade
- Parameterform, Koordinatenform, Normalenform einer Ebene

Punkte ablesen im Koordinatensystem



A (0|0|0) B (4|0|0)
C (4|8|0) D (0|8|0)
E (0|0|6) F (4|0|6)
G (4|8|6) H (0|8|6)

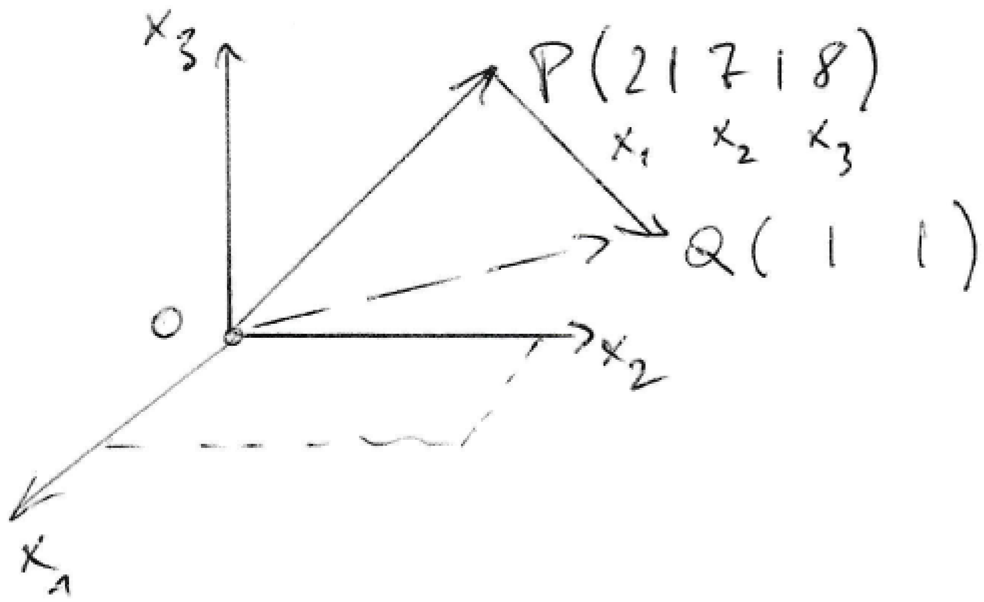
„Rechte-Hand-Regel“

Vektoren und ihre Repräsentanten

Was ist ein Vektor?

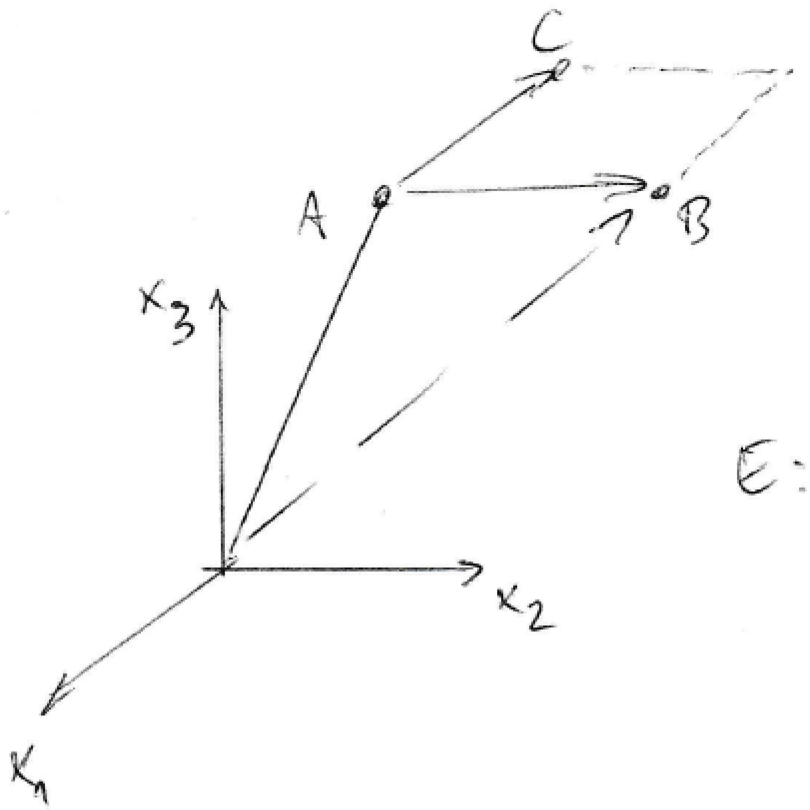
- Ein Vektor beschreibt eine Verschiebung im Raum oder entlang einer Ebene
- Vektoren werden durch einen Pfeil beschrieben, der die Richtung vorgibt
- Durch einen Vektor kann man sich mathematisch „im Raum fortbewegen“
  - ➢ **Wichtig**: Unterscheidung zwischen Orts- und Richtungsvektoren

Vektoren und ihre Repräsentanten



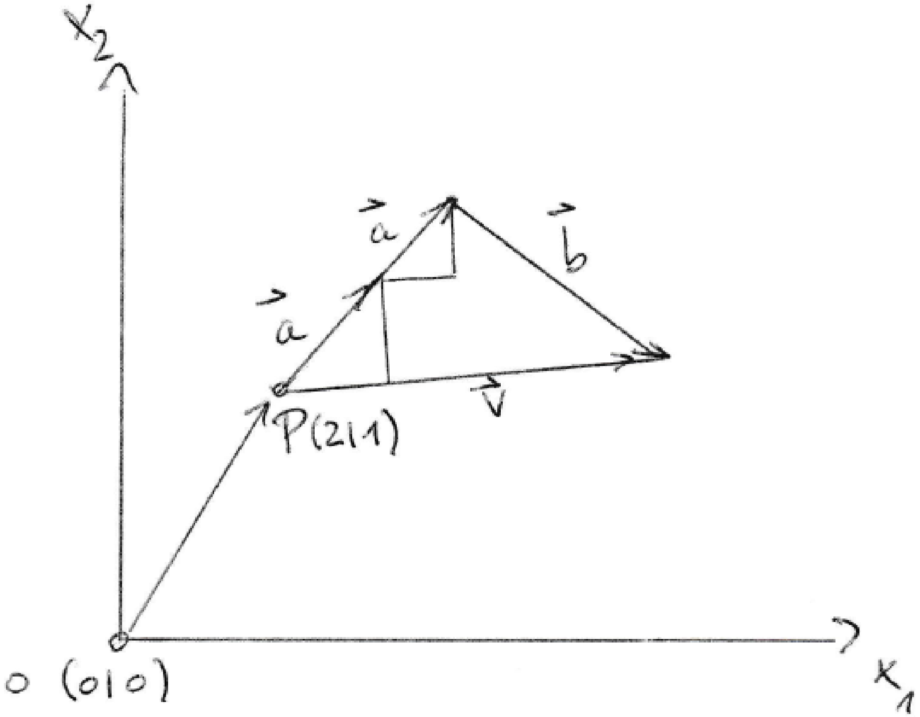
- Ein Ortsvektor ist **kein** Richtungsvektor!
- Ortsvektoren gehen vom Ursprungsvektor $(0|0)$ aus, Richtungsvektoren vom jeweiligen Ortsvektor

Orts- und Richtungsvektoren



$$E: \vec{x} = \underset{\overrightarrow{OA}}{\left(\vec{a}\right)} + r\underset{\overrightarrow{AB}}{\left(\quad\right)} + t\underset{\overrightarrow{AC}}{\left(\quad\right)}$$

Orts- und Richtungsvektoren



$$\vec a \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad \vec b \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \Longrightarrow 2\cdot\vec a + \vec b = \vec v$$

$$\overrightarrow{OP} = P - O = \vec p = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

- Begriff des **Gegenvektors**: Gegenvektor = entgegengerichteter Vektor = ursprünglicher Vektor $\cdot\ (-1)$

Rechenoperationen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 11 \text{ (Skalar)}$$

Kreuzprodukt / Vektorprodukt

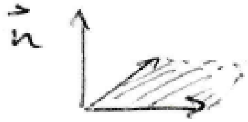
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 6 \\ 3 - 8 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

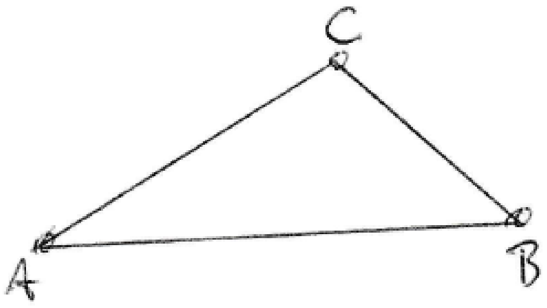
Kreuzprodukt / Vektorprodukt

Wo kommt $\vec{a} \times \vec{b}$ vor?

1) $\vec{n}$ bestimmen: $E: \vec{x} = () + r() + s()$



2) Flächeninhalt Dreieck:

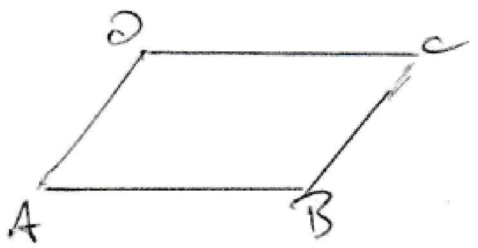


$$F_\Delta = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

Kreuzprodukt / Vektorprodukt

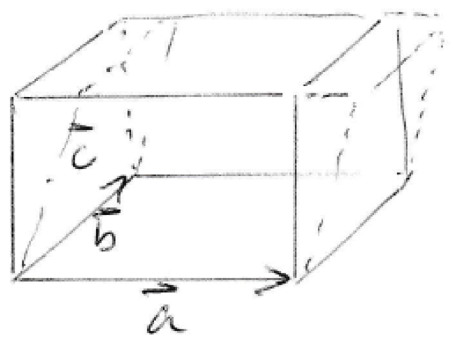
3) Flächeninhalt Parallelogramm:

$$F_P = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$



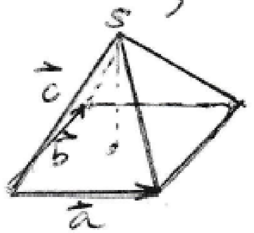
4) Spatvolumen:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$



Kreuzprodukt / Vektorprodukt

5) Volumen Pyramide: $V = \frac{1}{3} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$



Kreuzprodukt / Vektorprodukt

Beispiel: Bestimmung eines Normalenvektors

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

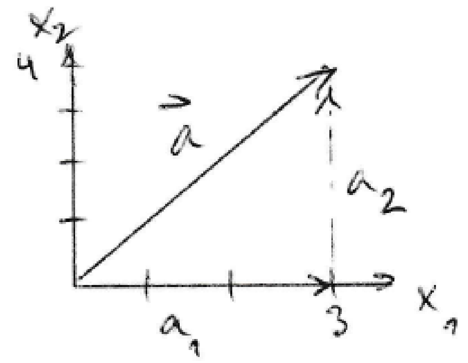
Test:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

Länge / Betrag eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$



$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4+9+16}$$
$$= \sqrt{29}$$

Einheitsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

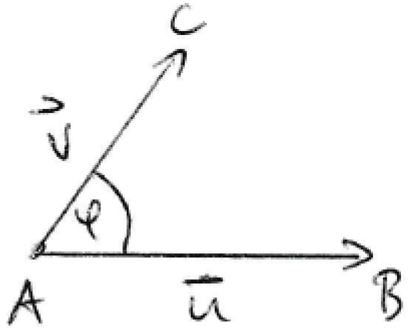
$$\Rightarrow \vec{v}_E = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Test: } |\vec{v}_E| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{9}} = 1 \quad \checkmark$$

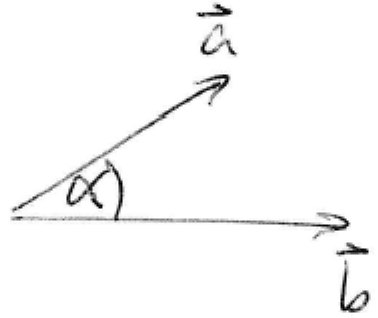
Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



Winkel zwischen zwei Vektoren

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



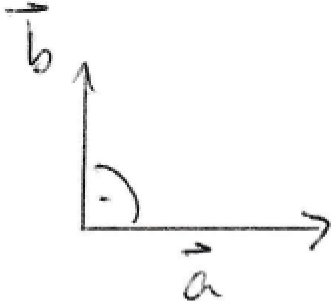
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{18}}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = 0{,}9428 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos(0{,}9428) = \underline{\underline{19{,}47^\circ}}$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Warum ist das Skalarprodukt zweier **orthogonaler** Vektoren $= \ 0$?

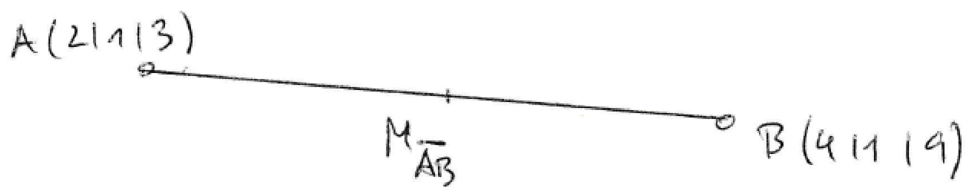
Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow$

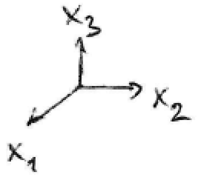


$\rightarrow$ weil $\cos(90°) = 0$

Beispiel: $\underset{\vec{a}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\vec{b}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = -4 + 4 = 0$

Mittelpunkt einer Strecke





1) $M_{\overline{AB}} = \left(\frac{a_1+b_1}{2} \,\middle|\, \frac{a_2+b_2}{2} \,\middle|\, \frac{a_3+b_3}{2} \right)$

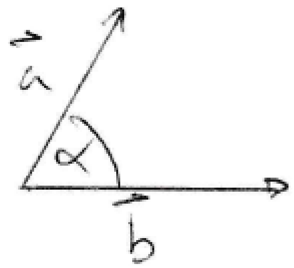
Hier: $M_{\overline{AB}} = \left(\frac{2+4}{2} \,\middle|\, \frac{1+1}{2} \,\middle|\, \frac{3+9}{2} \right)$

Mittelpunkt einer Strecke

2) $\underset{(\overrightarrow{OM})}{\vec{m}_{\overline{AB}}} = \underset{(\overrightarrow{OA})}{\vec{a}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

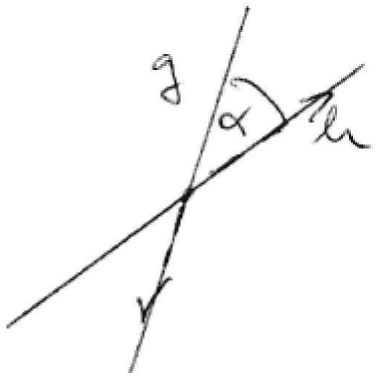
$\Rightarrow M_{\overline{AB}} = (3 \mid 1 \mid 6)$

Winkelbeziehungen



$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Winkelbeziehungen



$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Winkelbeziehungen

Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -3$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

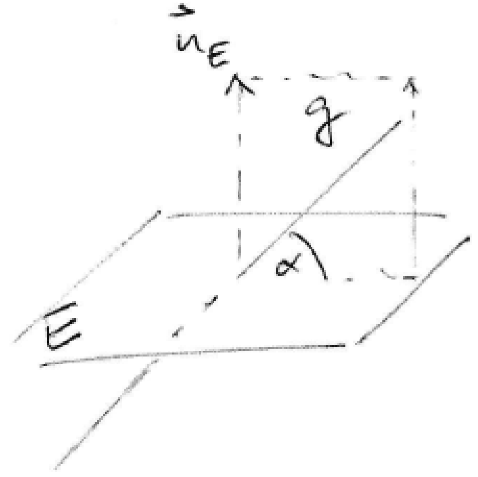
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Winkelbeziehungen

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{|-3|}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

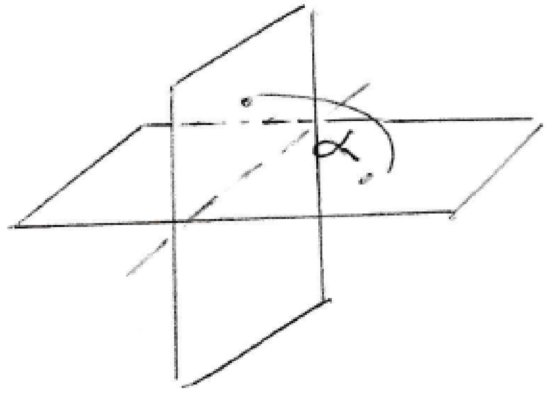
$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \underline{\underline{54{,}74^\circ}}$$

Winkelbeziehungen



„RV“ = Richtungsvektor

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{RV}_g|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{RV}_g|}$$



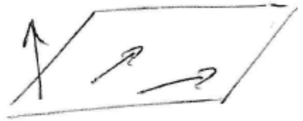
$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Lagebeziehungen

kolinear, linear abhängig

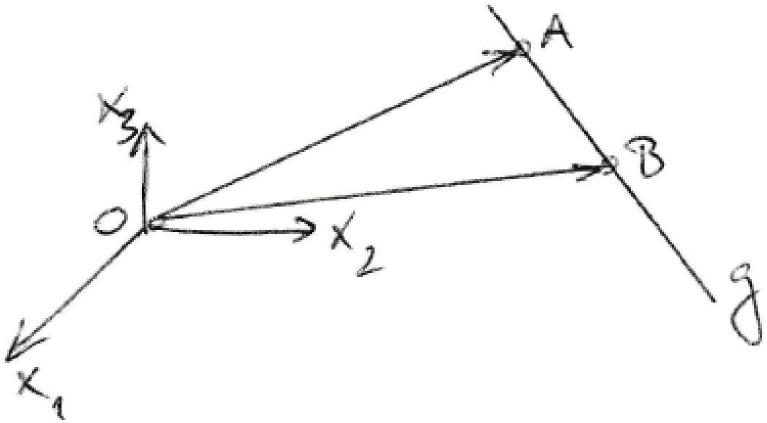
linear unabhängig

komplanar, linear abhängig



linear unabhängig

Parameterform einer Gerade



„Ortsvektor + λ · Richtungsvektor"

$$\rightarrow g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot [\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}]$$

Lotfußpunktverfahren

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$P(2|2|2)$

$$\begin{pmatrix}2{,}5\\1\\1{,}5\end{pmatrix} \quad L(2{,}5|1|1{,}5)$$

$$\left[\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{Gerade}} - \underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}}_{\text{Punkt}}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Lotfußpunktverfahren

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} r \\ -1 \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow r \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (r-1) \cdot 1$$

$$= r + r - 1 = 2r - 1 = 0 \Leftrightarrow 2r = 1$$

Lotfußpunktverfahren

$\Leftrightarrow$ $r = 0{,}5$ $\rightarrow$ Einsetzen für r in $g: \vec{x}$

$$\Rightarrow \vec{PL} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{PL}| = \sqrt{0{,}5^2 + (-1)^2 + (-0{,}5)^2} = \sqrt{1{,}5} \approx \underline{\underline{1{,}22}}$$

Rechnungen mit Geraden

Beispielaufgabe:

$P_1(2|1|3)$ $\qquad$ $P_2(7|7|10)$

$|\longleftarrow \sqrt{110}\,\text{km} \longrightarrow|$

$v = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Wo ist der Ballon nach 40 min?

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \qquad |\vec{u}| = \sqrt{110} \approx 10{,}49$$

Rechnungen mit Geraden

$$h^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{110}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\text{1 km Länge („normiert“)}}$$

$\rightarrow$ 30 km in einer Std. $\Rightarrow$ 20 km in 40 min

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{110}} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{20}{\sqrt{110}} \cdot 5 \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Ebenen: Parameter- in Koordinatenform

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} \text{I} & x_1 & = & 2 + 1r + 2s \\ \text{II} & x_2 & = & 1 + 1r - 1s \\ \text{III} & x_3 & = & 1 - 1r + 3s \end{array}$$

$-$ (II − I), $+$ (III + II)

$$\begin{array}{lll} x_2 - x_1 & = -1 - 3s & \mid \cdot 2 \\ x_3 + x_2 & = 2 + 2s & \mid \cdot 3 \end{array}$$

$+$

Ebenen: Parameter- in Koordinatenform

$$2 \cdot (x_2 - x_1) + 3(x_3 + x_2) = -2 + 6$$

$$\Rightarrow \underline{2x_2} - 2x_1 + 3x_3 + \underline{3x_2} = 4$$

$$\Leftrightarrow -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4$$

→ „Hessesche Normalenform"

<u>Form:</u> $\vec{x} \cdot \vec{n}_0 - d = 0$

d: Abstand Koordinatenursprung

$\vec{n}_0$: normierter Einheitsvektor

Ebenen: Koordinaten- in Parameterform

$E: \vec{x} = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$

$\rightarrow \quad S_1(6 \mid 0 \mid 0) \qquad 2x_1 = 12$

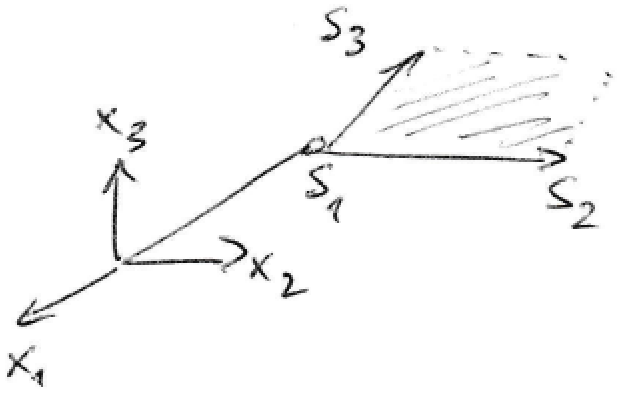
$S_2(0 \mid 3 \mid 0) \qquad 4x_2 = 12$

$S_3(0 \mid 0 \mid 4) \qquad 3x_3 = 12$

Ebenen: Koordinaten- in Parameterform

Ebene „aufspannen“:

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overline{OS_1}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overline{S_1S_2}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overline{S_1S_3}}$$



Lage zwischen Gerade und Ebene

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lage zwischen Gerade und Ebene

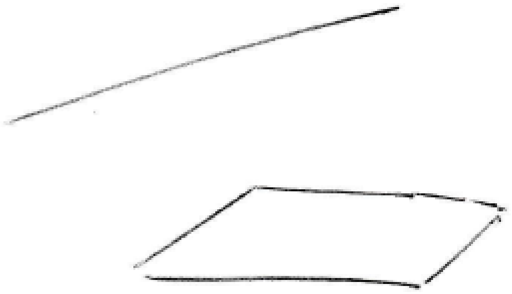
$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 1r & - & 0s & - & 7t & = & 1 \\ \text{II} & 1r & - & 1s & + & 3t & = & -1 \\ \text{III} & 1r & - & 1s & - & 4t & = & -3 \end{array}$$

...

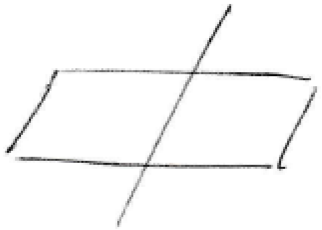
Lage zwischen Gerade und Ebene

3 Fälle:

$0 = 8$



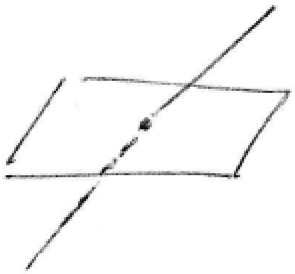
$0 = 0$



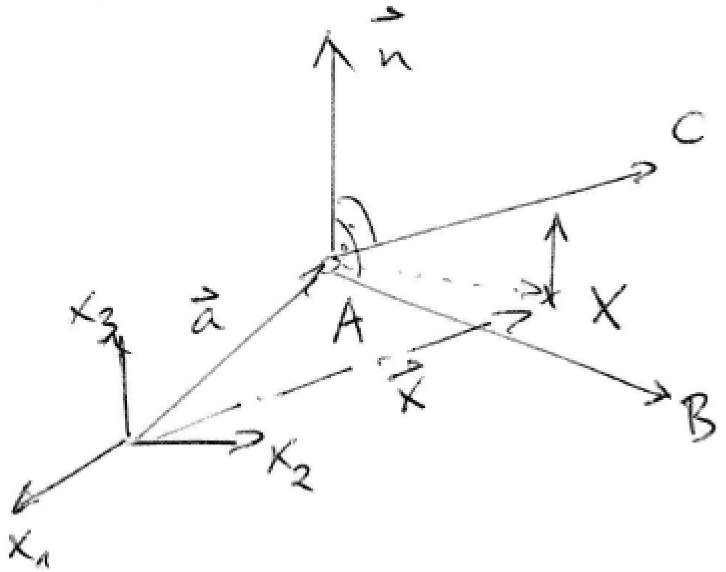
$t = 2$

$s = 4$

$r = 1$



Normalenform / Koordinatenform



$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$$

Es gilt: $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

Normalenform / Koordinatenform

Beispiel: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Aufpunktvektor derselbe wie bei Parameterform

3) $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$

Abstand Punkt / Ebene

$\circ\ P(2|8|2)$

$E: 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2x_1 - x_2 + 4x_3 - 1}{\sqrt{21}} \right| = d(P;E)$$

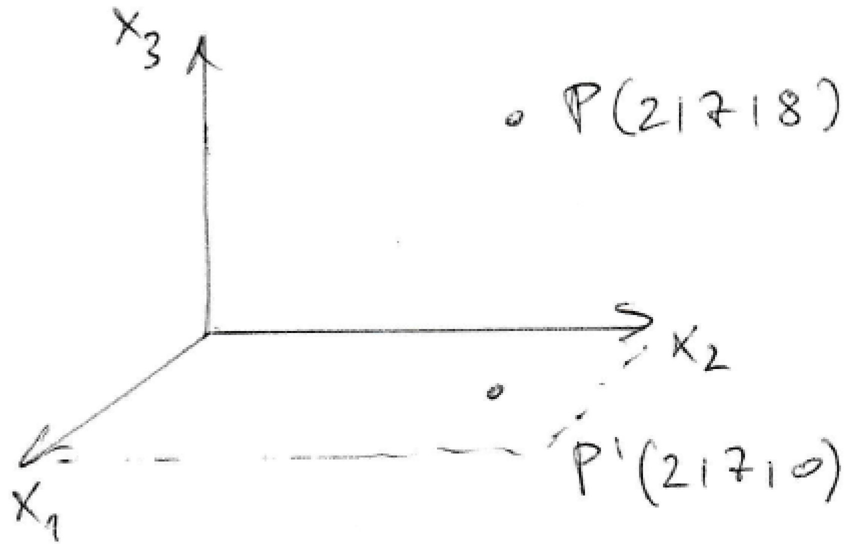
Abstand Punkt / Ebene

$$\rightarrow \left| \frac{2 \cdot 2 - 8 + 4 \cdot 2 - 1}{\sqrt{21}} \right| = \left| \frac{4 - 8 + 8 - 1}{\sqrt{21}} \right|$$

$$= \frac{3}{\sqrt{21}} \approx \underline{\underline{0{,}655}}$$

$\rightarrow$ mit Hessescher Normalenform einfach!

Abbilden in eine Koordinatenebene



$$A \cdot \vec{x} = \vec{x}\,'$$

Abbilden in eine Koordinatenebene

Beispiel:

$$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

„Zeile · Spalte“