Mathematik - Analytische Geometrie

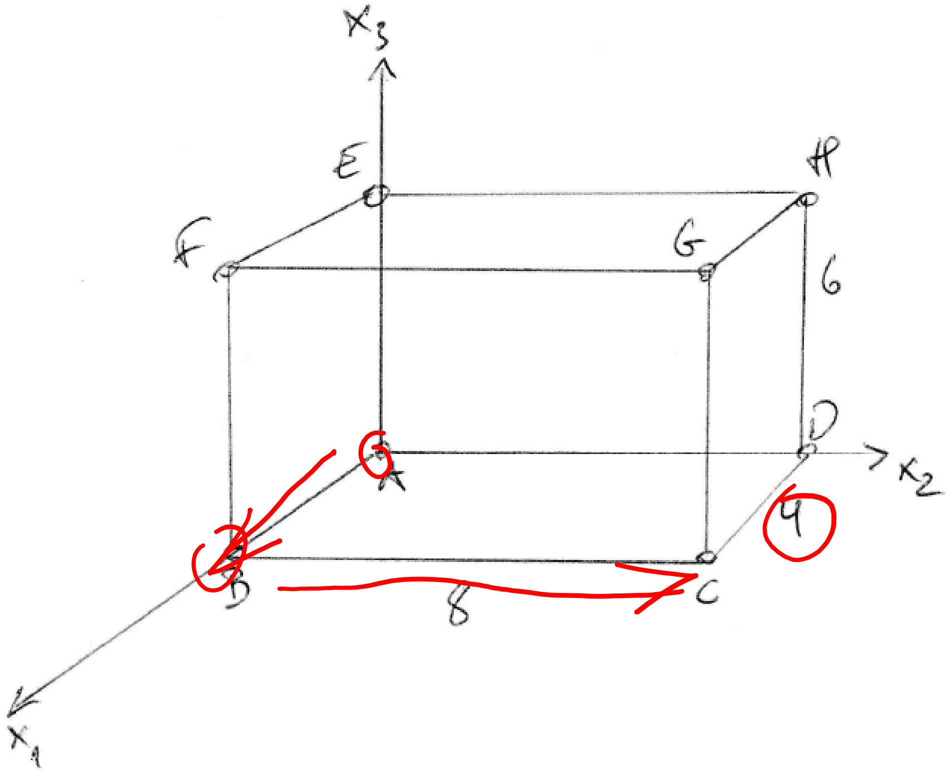
Vektorrechnung - Komplettübersicht

- Vektor- und Lagebeziehungen
- Orts- / Richtungsvektoren
- Länge eines Vektors
- Skalarprodukt
- Winkelberechnung
- Kreuzprodukt
- Mittelpunkt Strecke

Vektorrechnung - Komplettübersicht

- Abstand $(P|P)$, $(P|G)$, $(P|E)$, $(G|G)$, $(G|E)$
- Lage G/E, E/E
- Punktprobe P/G, P/E
- Parameterform einer Gerade
- Parameterform, Koordinatenform, Normalenform einer Ebene

Punkte ablesen im Koordinatensystem



A $(0|0|0)$
C $(4|8|0)$
E $(0|0|6)$
G $(4|8|6)$

B $(4|0|0)$
D $(0|8|0)$
F $(4|0|6)$
H $(0|8|6)$

„Rechte-Hand-Regel“

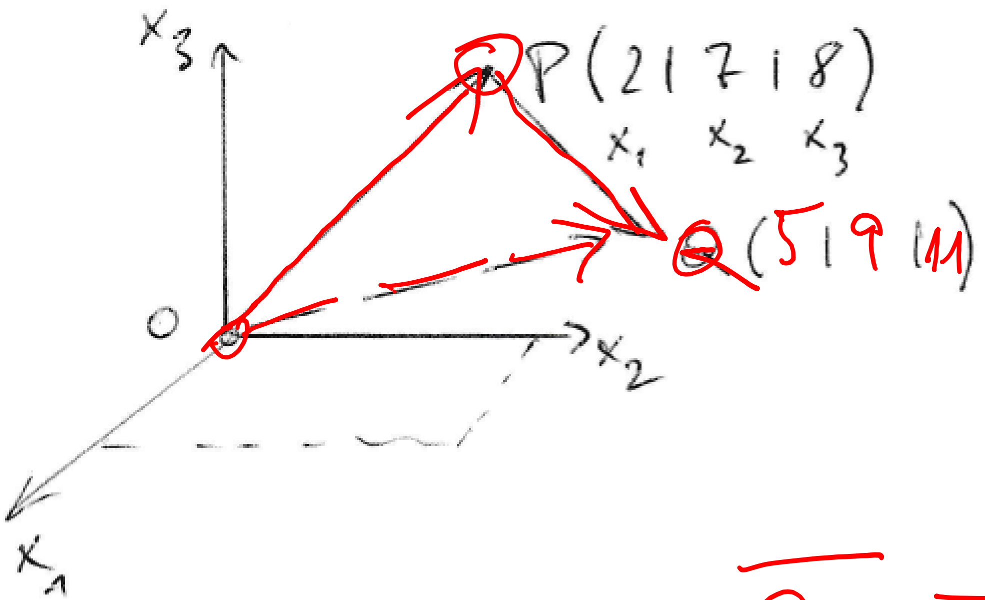
Vektoren und ihre Repräsentanten

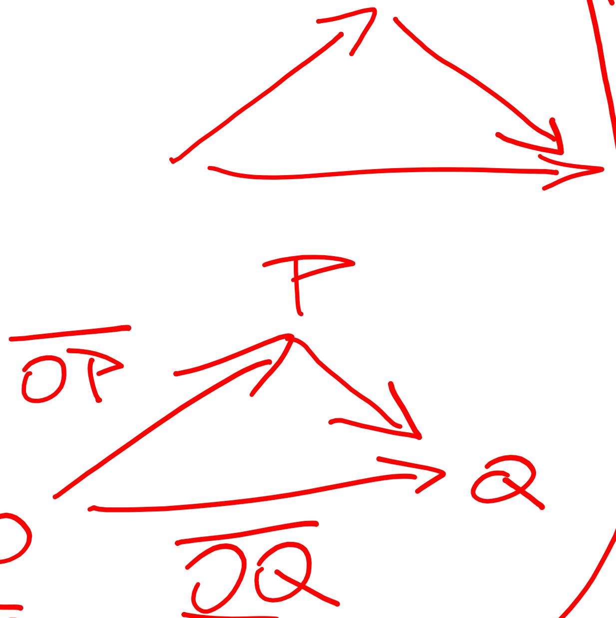
Was ist ein Vektor?

- Ein Vektor beschreibt eine Verschiebung im Raum oder entlang einer Ebene
- Vektoren werden durch einen Pfeil beschrieben, der die Richtung vorgibt
- Durch einen Vektor kann man sich mathematisch „im Raum fortbewegen“
  - ➢ **Wichtig**: Unterscheidung zwischen Orts- und Richtungsvektoren

Vektoren und ihre Repräsentanten

von P nach Q: $\overline{PQ} = Q - P$



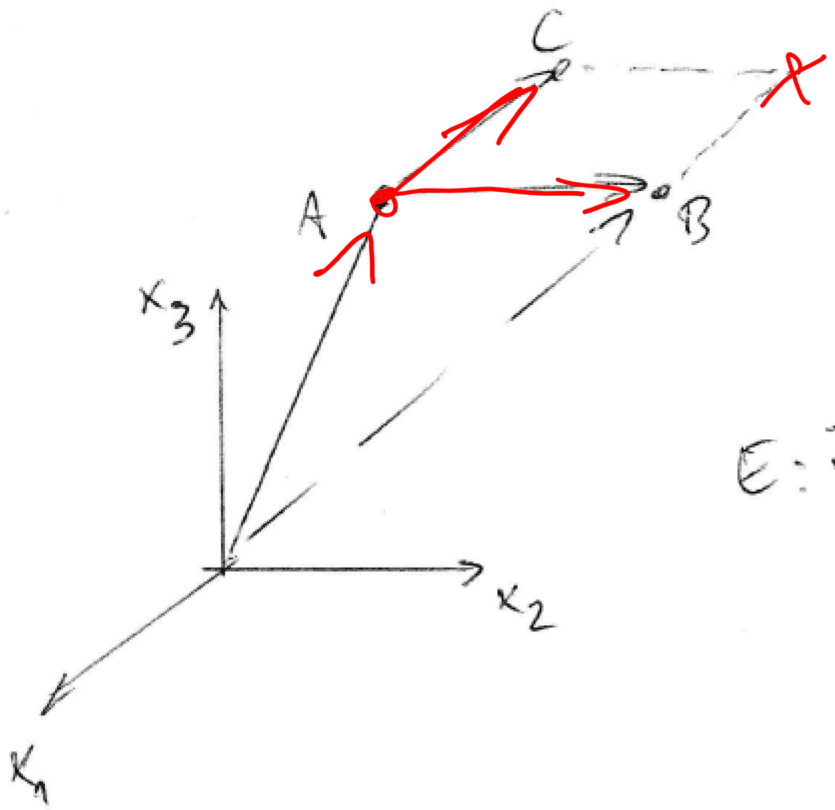


$\overline{OP} + \overline{PQ} = \overline{OQ}$

$\Leftrightarrow \overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$

- Ein Ortsvektor ist **kein** Richtungsvektor!
- Ortsvektoren gehen vom Ursprungsvektor $(0|0)$ aus, Richtungsvektoren vom jeweiligen Ortsvektor

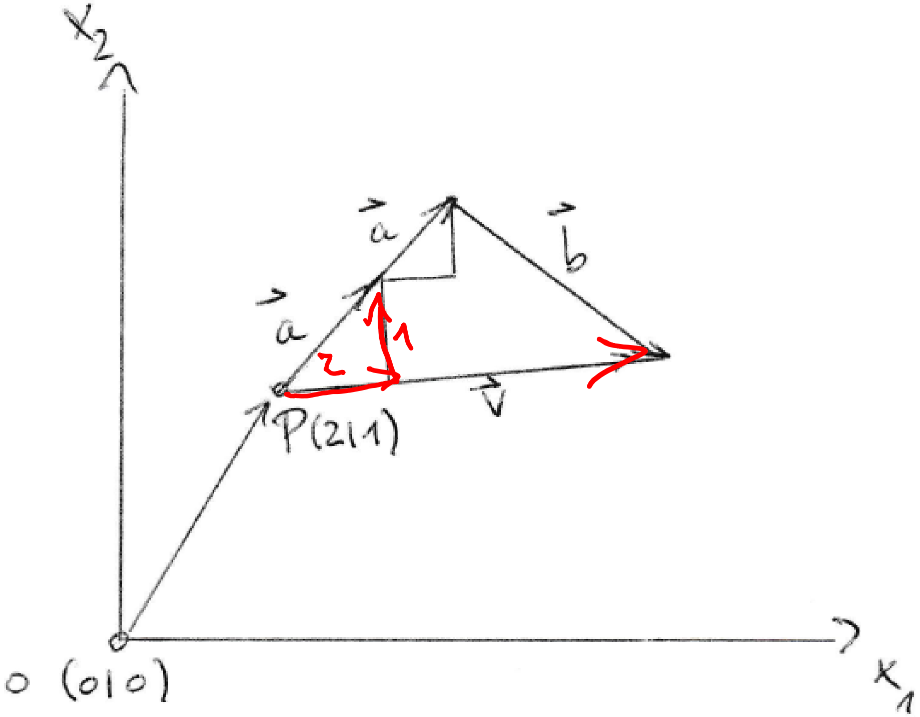
Orts- und Richtungsvektoren



$$E: \vec{x} = \left(\vec{a}\right) + r\left(\quad\right) + t\left(\quad\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC} \\ = & = & = \\ OV & RV_1 & RV_2 \end{array}$$

Orts- und Richtungsvektoren



$\vec a \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\vec b \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ $2\cdot\vec a + \vec b = \vec v$

$\overrightarrow{OP} = \overline{OP} - \overline{OO} = \vec p = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

- Begriff des **Gegenvektors**: Gegenvektor = entgegengerichteter Vektor = ursprünglicher Vektor $\cdot\ (-1)$

Rechenoperationen

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}$$

Skalar

$$2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 1\\2\cdot 2\\2\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\11\\10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = 2\cdot 2 + 1\cdot 4 + 3\cdot 1 = 11 \quad (\text{Skalar})$$

Skalarprodukt

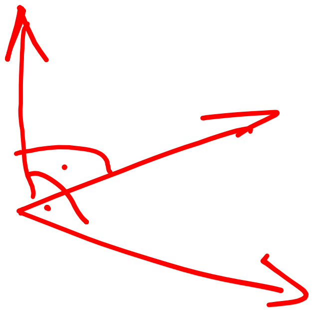
Kreuzprodukt / Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 6 \\ 3 - 8 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

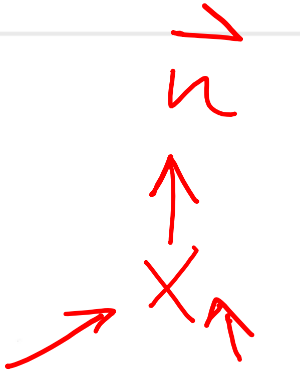
$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array}$$

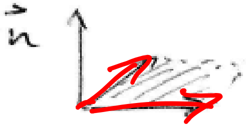


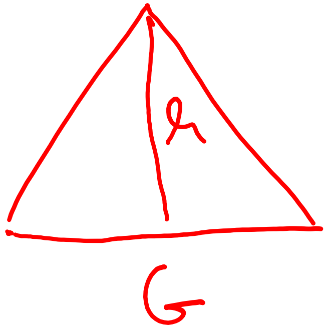
Kreuzprodukt / Vektorprodukt

Wo kommt $\vec{a} \times \vec{b}$ vor?

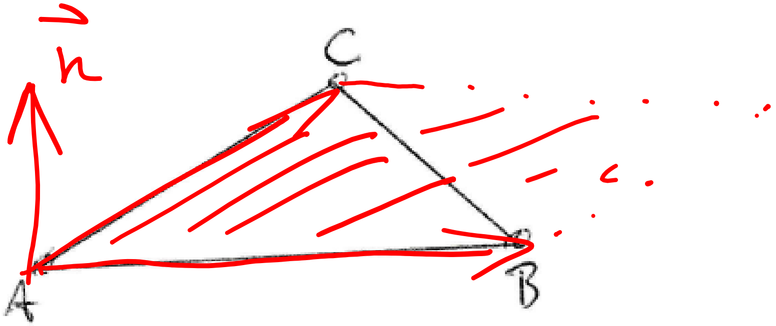


1) $\vec{n}$ bestimmen: $E: \vec{x} = (\ ) + r(\ ) + s(\ )$





2) Flächeninhalt Dreieck:



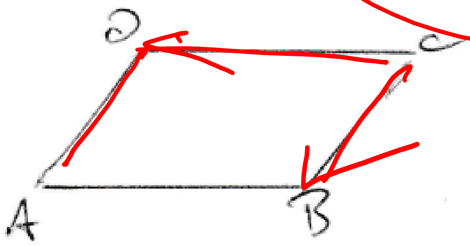
$$F_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$$

Kreuzprodukt / Vektorprodukt

3) Flächeninhalt Parallelogramm:

$$F_P = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

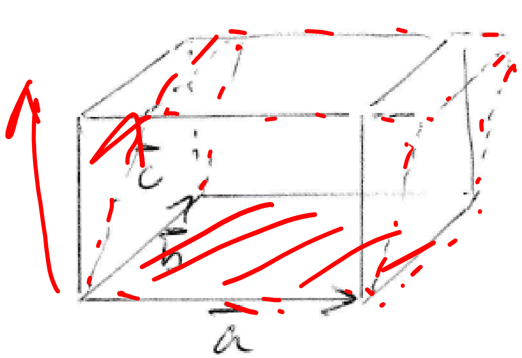
$$= |\vec{BC} \times \vec{CD}|$$



$|\vec{n}| = A$

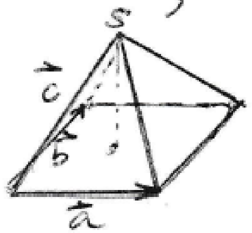
4) Spatvolumen:

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$



Kreuzprodukt / Vektorprodukt

5) Volumen Pyramide: $V = \frac{1}{3}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$



Kreuzprodukt / Vektorprodukt

Beispiel: Bestimmung eines Normalenvektors

$$E: \vec{x} = \overset{OV}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}} + r \overset{RV_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} + s \overset{RV_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Test:

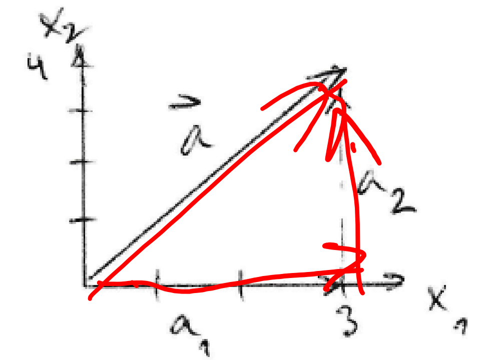
$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

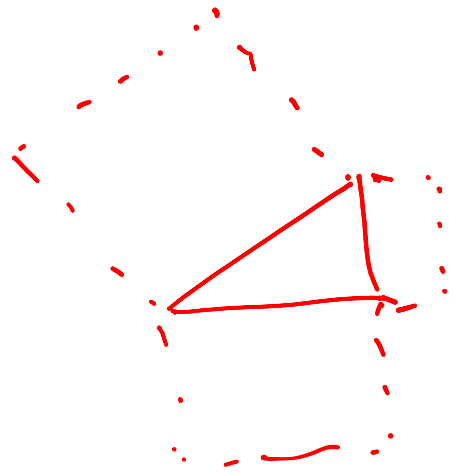
$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

Länge / Betrag eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ LE}$$





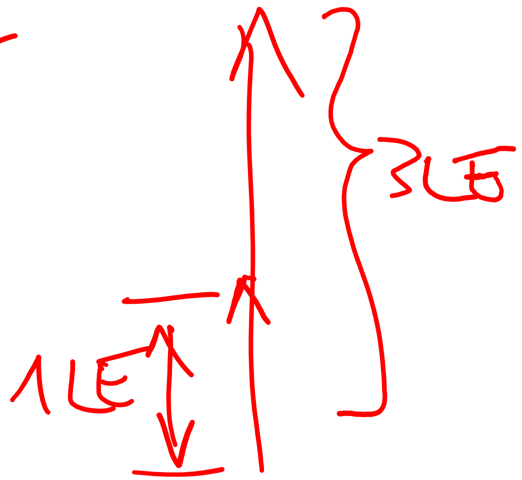
$$\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4+9+16}$$

$$= \sqrt{29} \text{ LE}$$

Einheitsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3 \text{ LE}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_E = \frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}$$



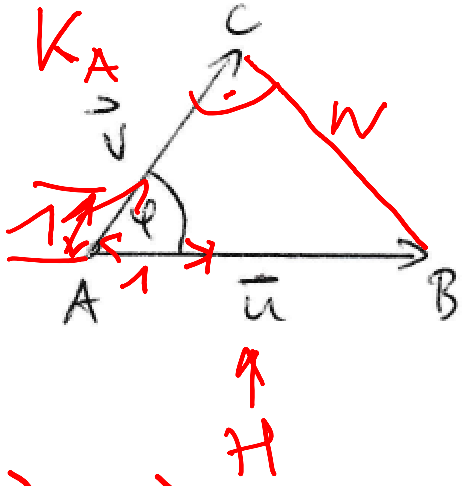
Test: $|\vec{v}_E| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}$

$$= \sqrt{\frac{9}{9}} = 1 \text{ LE} \quad \checkmark$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

$$H \cdot \cos\alpha = K_A$$

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

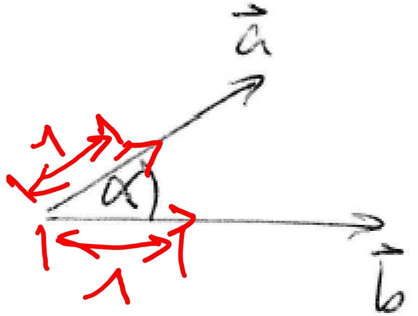


$$\Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{u}_E \cdot \vec{v}_E$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} =$$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

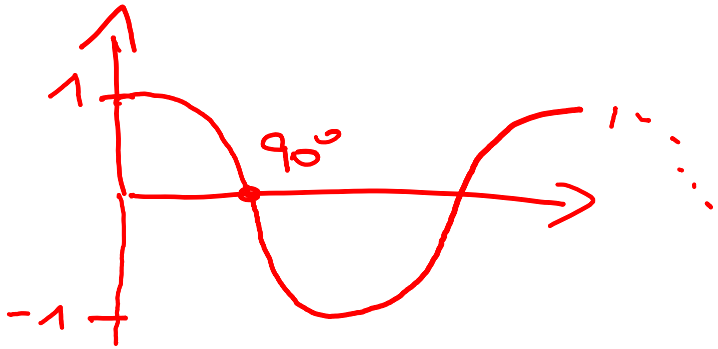


$\arccos = \cos^{-1}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{18}}$$

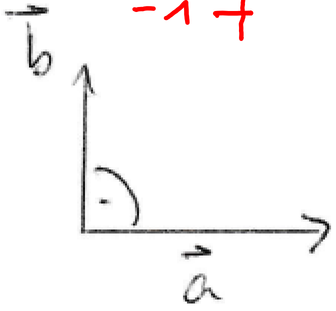
$$\Rightarrow \cos(\alpha) = 0{,}9428 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos(0{,}9428) = 19{,}47^\circ$$

Winkel zwischen zwei Vektoren



Warum ist das Skalarprodukt zweier **orthogonaler** Vektoren $=\ 0$?

Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow$

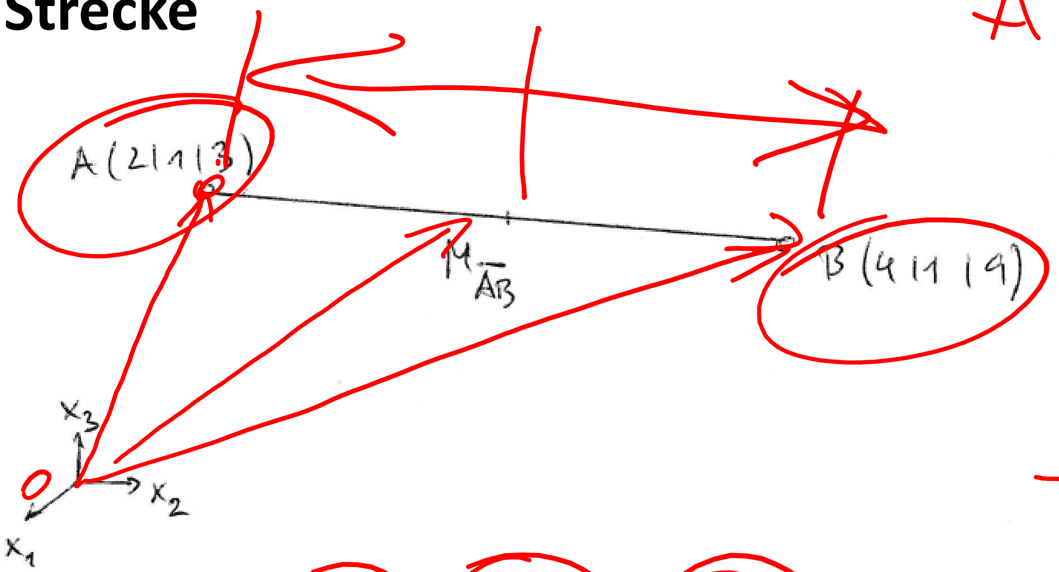


→ weil $\cos(90°) = 0$

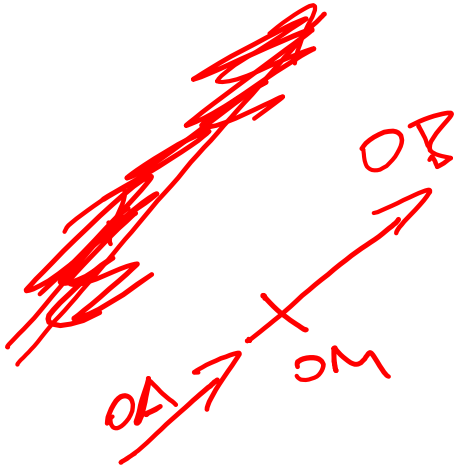
Beispiel: $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} = -4 + 4 = 0$

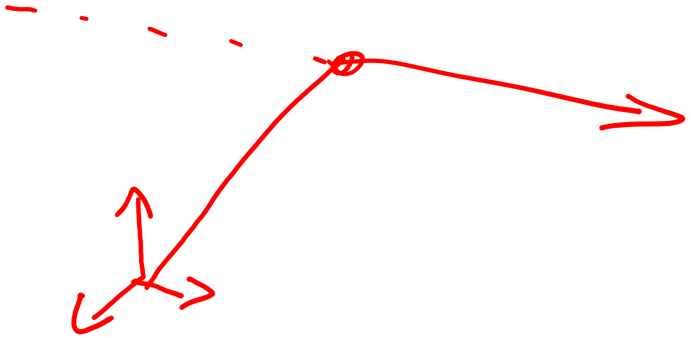
Mittelpunkt einer Strecke

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$



$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$

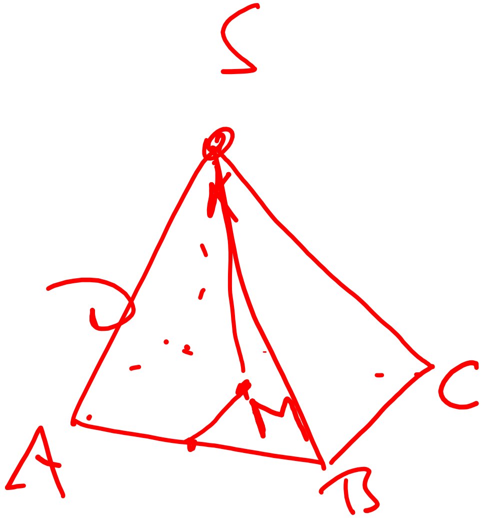




1) $M_{\overline{AB}} = \left(\frac{a_1+b_1}{2} \middle| \frac{a_2+b_2}{2} \middle| \frac{a_3+b_3}{2} \right)$

Hier: $M_{\overline{AB}} = \left(\frac{2+4}{2} \middle| \frac{1+1}{2} \middle| \frac{3+9}{2} \right)$

Mittelpunkt einer Strecke



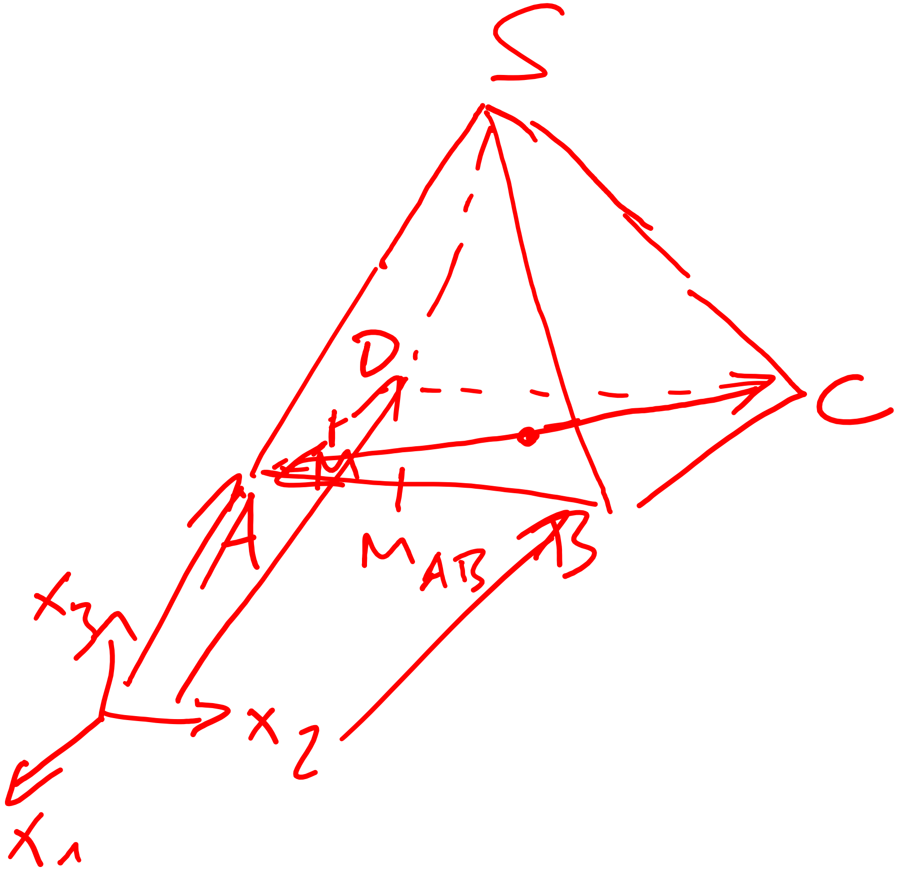
$\overline{AB}$

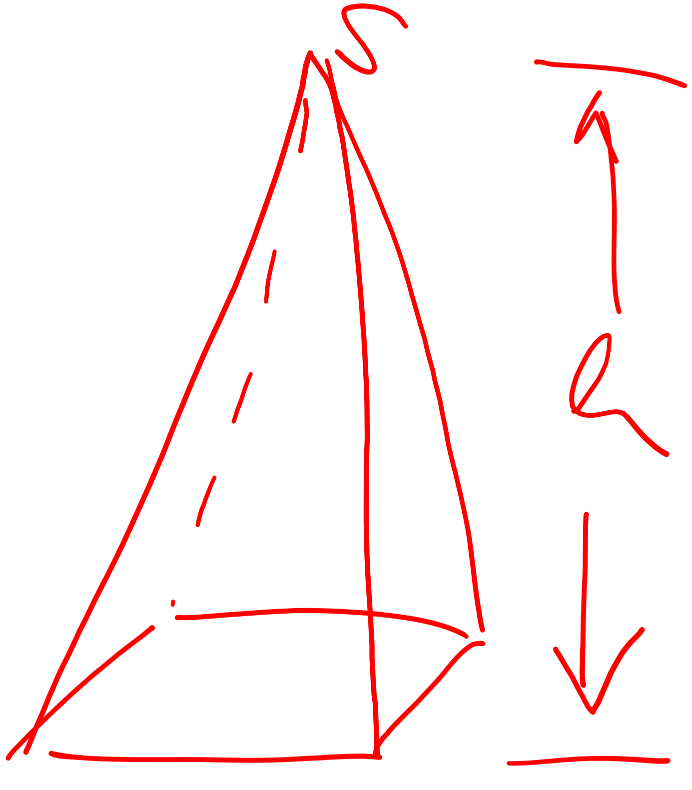
2) $\vec{m}_{\overline{AB}} = \vec{a} + \frac{1}{2}\,\vec{AB} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}$

$(\vec{OM})$ $(\vec{OA})$

$\Rightarrow M_{\overline{AB}} = (3\,|\,1\,|\,6)$

Mittelpunkt einer Strecke

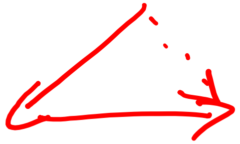


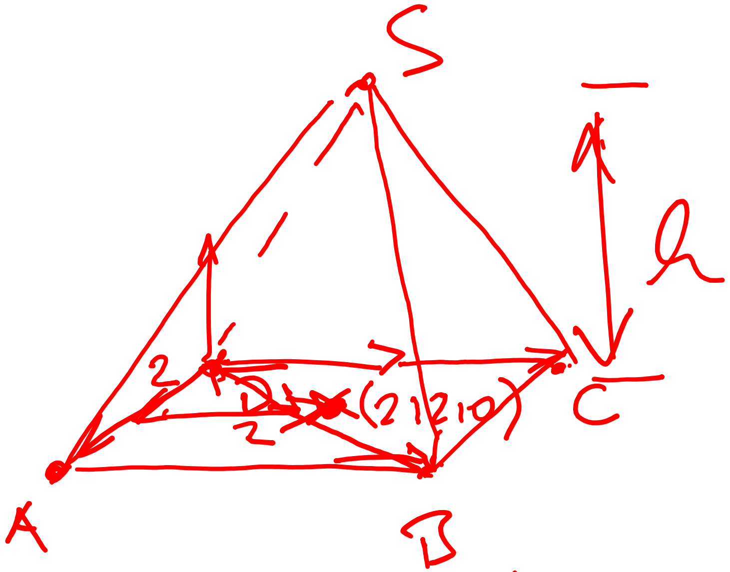


Mittelpunkt einer Strecke

$M_{\overline{DB}} = (2|2|0)$

$\vec{0M}_{\overline{DB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$





$A\ (4|0|0)$

$B\ (4|4|0)$

$C\ (0|4|0)$

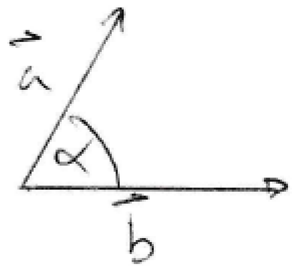
$D\ (0|0|0)$

$S(2|2|12)$

$h = 12\,m$

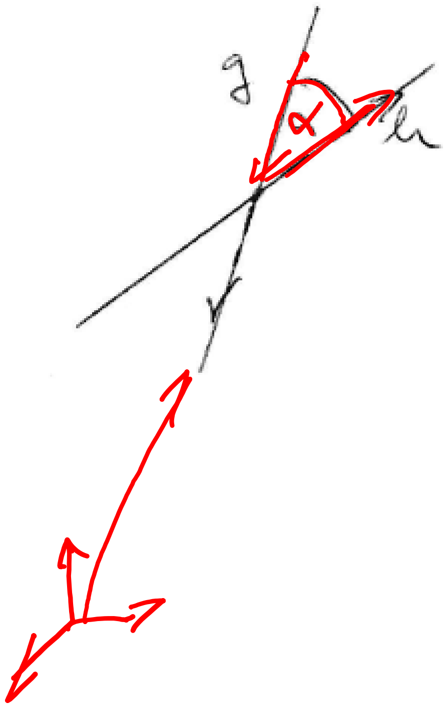
$\overline{DB} = B - D = \cancel{(4|4|0)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Winkelbeziehungen



$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Winkelbeziehungen



$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Winkelbeziehungen

Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -3$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

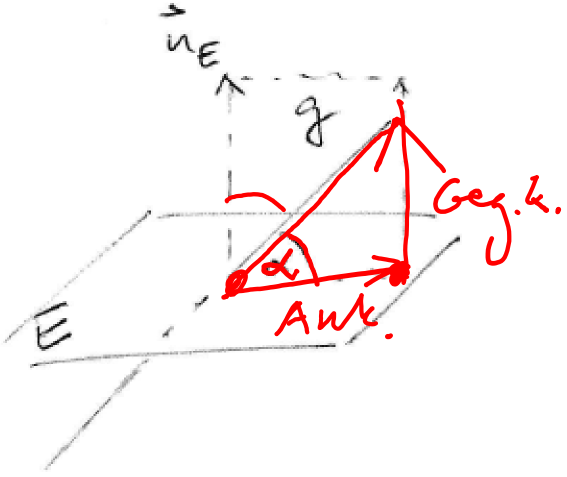
Winkelbeziehungen

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{|-3|}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \underline{\underline{54{,}74°}}$$

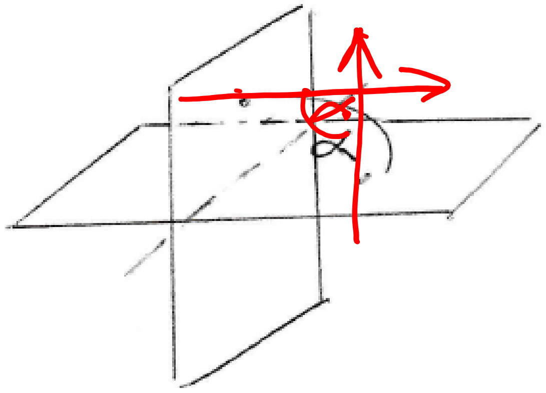
$$\cos^{-1}$$

Winkelbeziehungen



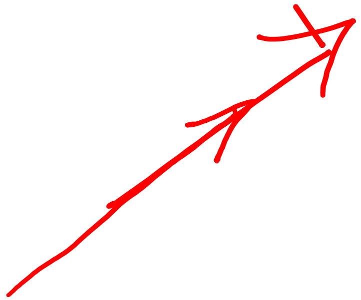
„RV" = Richtungsvektor

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{RV}_g|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{RV}_g|} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}$$



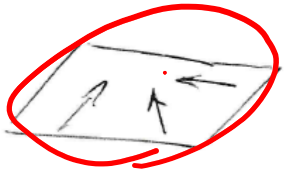
$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Lagebeziehungen

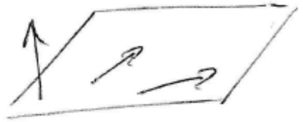


kolinear, linear abhängig

linear unabhängig

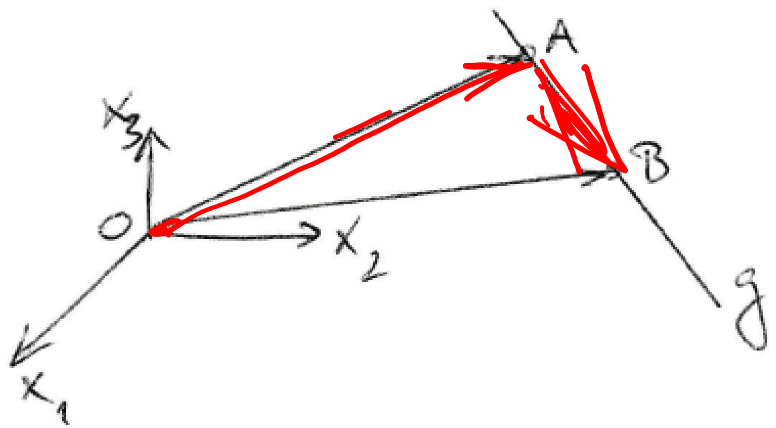


komplanar, linear abhängig



linear unabhängig

Parameterform einer Gerade

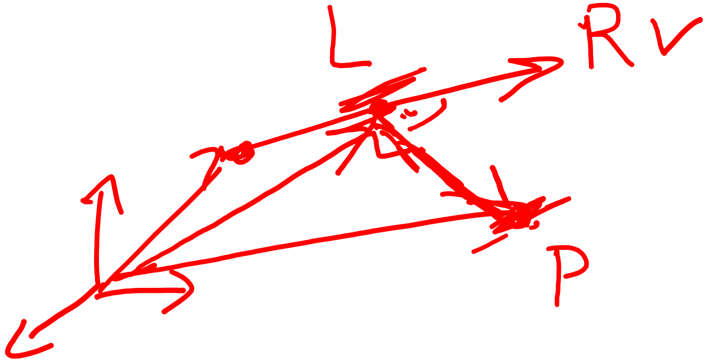


„Ortsvektor + λ · Richtungsvektor"

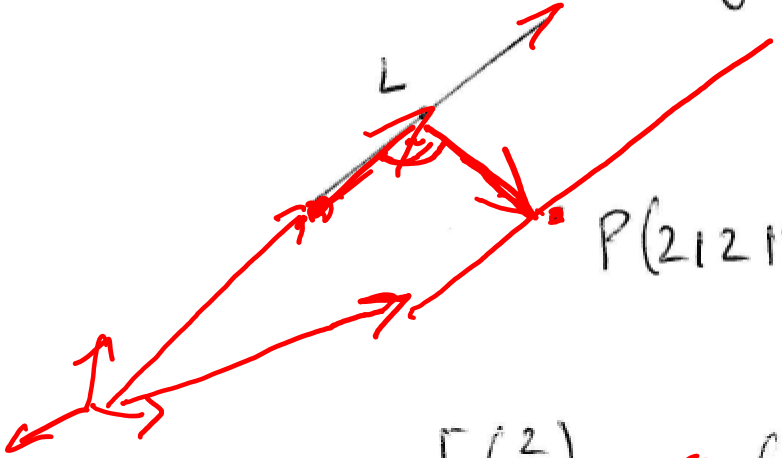
$$\rightarrow g: \vec{x} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{AB}$$

$$= \vec{OA} + \lambda \cdot [\vec{OB} - \vec{OA}]$$

Lotfußpunktverfahren



$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$P(2|2|2)$

$$\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \quad L(2{,}5|1|1{,}5)$$

$$\Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Gerade}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Punkt}} \Bigg] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Lotfußpunktverfahren

$$\Rightarrow \overbrace{\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]}^{\text{Gerade } \cancel{g_f} \text{ von LP}} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

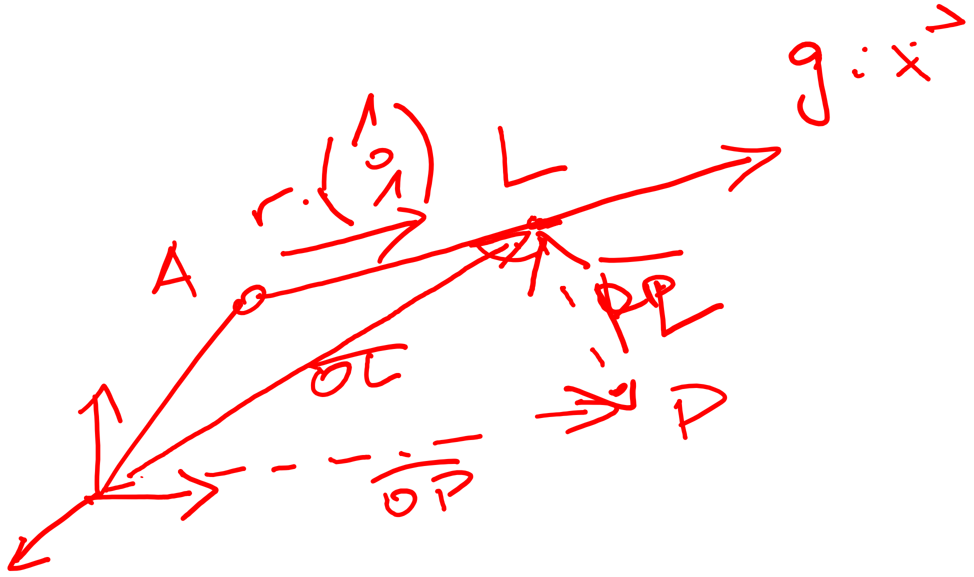
RV von $g: \vec{x}$

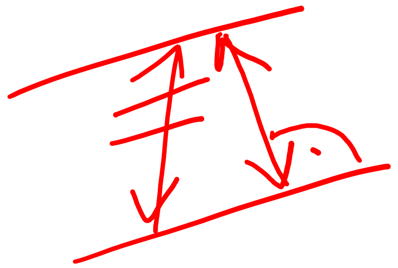
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}r\\-1\\r-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{r \cdot 1} + \underline{(-1)\cdot 0} + \underline{(r-1)\cdot 1}$$

$$= \underline{r + r - 1} = \underline{2r - 1} = \underline{0} \Leftrightarrow 2r = 1 \Rightarrow r = 0{,}5$$

Lotfußpunktverfahren





$\vec{OL} + \vec{PL} = \vec{OP}$

$\Rightarrow \vec{OP} - \vec{OL}$

Lotfußpunktverfahren

$\Leftrightarrow$ $r = 0{,}5$ $\rightarrow$ Einsetzen für r in $g: \vec{x}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PL}| = \sqrt{0{,}5^2 + (-1)^2 + (-0{,}5)^2} = \sqrt{1{,}5} \approx \underline{\underline{1{,}22}} \text{ LE}$$

Rechnungen mit Geraden

$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Beispielaufgabe:

$P_1(2|1|3)$ $\qquad$ $P_2(7|7|10)$

$v = 30 \frac{km}{h}$ $\qquad$ $\sqrt{110}\ km$

Wo ist der Ballon nach ~~40~~ min?

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$ $\qquad$ $|\vec{u}| = \sqrt{110} \approx 10{,}49\ km$

Verlängerung Gerade

Rechnungen mit Geraden

$$h^*: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{Start}} + \lambda \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{110}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{1\,\text{km Länge („normiert")}}$$

→ 30 km in einer Std. ⇒ 20 km in 40 min

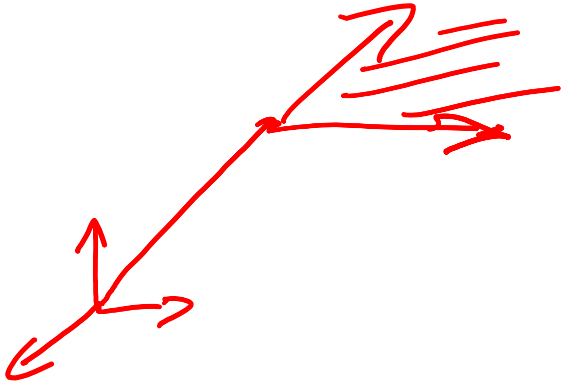
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{110}} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{20}{\sqrt{110}} \cdot 5 \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$\overline{OZ}$

Z = Ziel

Ebenen: Parameter- in Koordinatenform

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{array}{lllr} \text{I} & x_1 & = 2 + 1r + 2s & \\ \text{II} & x_2 & = 1 + 1r - 1s & - \\ \text{III} & x_3 & = 1 - 1r + 3s & + \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x_2 - x_1 & = -1 - 3s & | \cdot 2 \\ x_3 + x_2 & = 2 + 2s & | \cdot 3 \quad + \end{array}$$

Ebenen: Parameter- in Koordinatenform

$$2\cdot(x_2 - x_1) + 3(x_3 + x_2) = -2 + 6$$

$$\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + 3x_3 + 3x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4$$

→ „Hessesche Normalenform"

Form: $\vec{x} \cdot \vec{n}_0 - d = 0$

d: Abstand Koordinatenursprung

$\vec{n}_0$: normierter Einheitsvektor

Ebenen: Koordinaten- in Parameterform

$$E: \vec{x} = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$$

$\rightarrow$ $S_1\,(6\,|\,0\,|\,0)$ $\quad 2x_1 = 12$

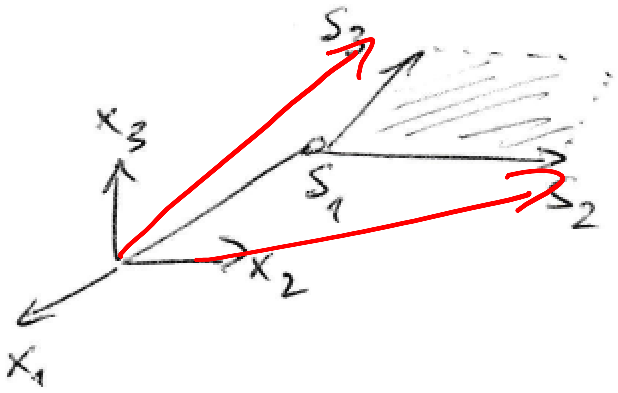
$S_2\,(0\,|\,3\,|\,0)$ $\quad 4x_2 = 12$

$S_3\,(0\,|\,0\,|\,4)$ $\quad 3x_3 = 12$

Ebenen: Koordinaten- in Parameterform

Ebene „aufspannen“!

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OS_1}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{S_1S_2}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{S_1S_3}}$$



Lage zwischen Gerade und Ebene

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underline{r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Lage zwischen Gerade und Ebene

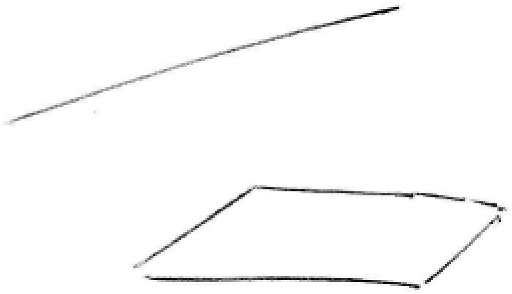
$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & 1r - 0s - 7t & = & 1 \\ \mathrm{II} & 1r - 1s + 3t & = & -1 \\ \mathrm{III} & 1r - 1s - 4t & = & -3 \end{array}$$

...

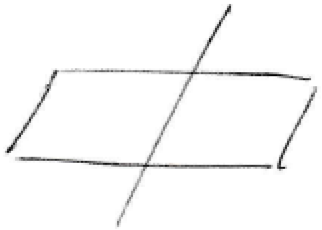
Lage zwischen Gerade und Ebene

3 Fälle :

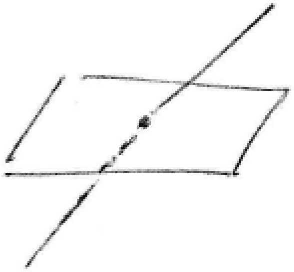
$0 = 8$



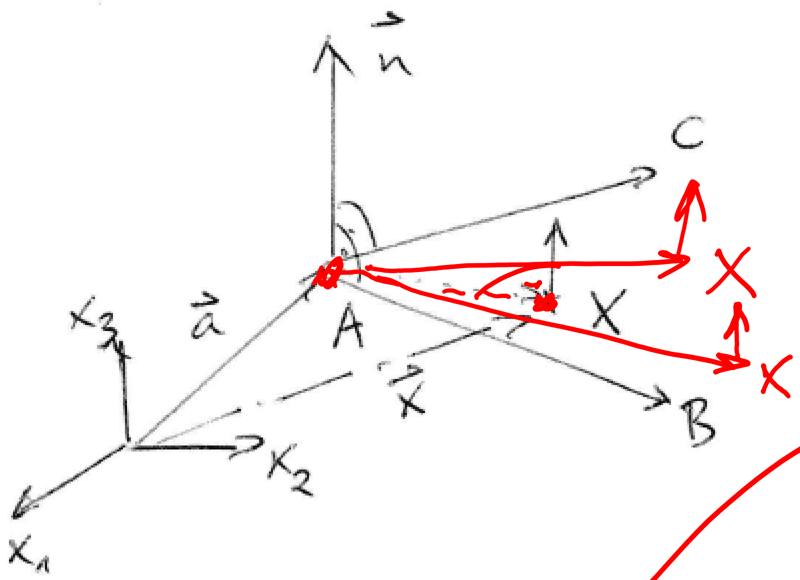
$0 = 0$



$t = 2$
$s = 4$
$r = 1$



Normalenform / Koordinatenform



$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$$ Bsp. 1

$$E: \overset{\vec{n}}{\begin{pmatrix}7\\8\\4\end{pmatrix}} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}\right] = 0$$ Bsp. 2

$$E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$$ Bsp. 3

Es gilt: $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

Normalenform / Koordinatenform

Beispiel: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

2) Aufpunktvektor derselbe wie bei Parameterform

3) $E: \underline{\underline{\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a})}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \cdot \left[\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$

Abstand Punkt / Ebene

$P(2|8|2)$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$E: 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2x_1 - x_2 + 4x_3 - 1}{\sqrt{21}} \right| = d(P;E)$$

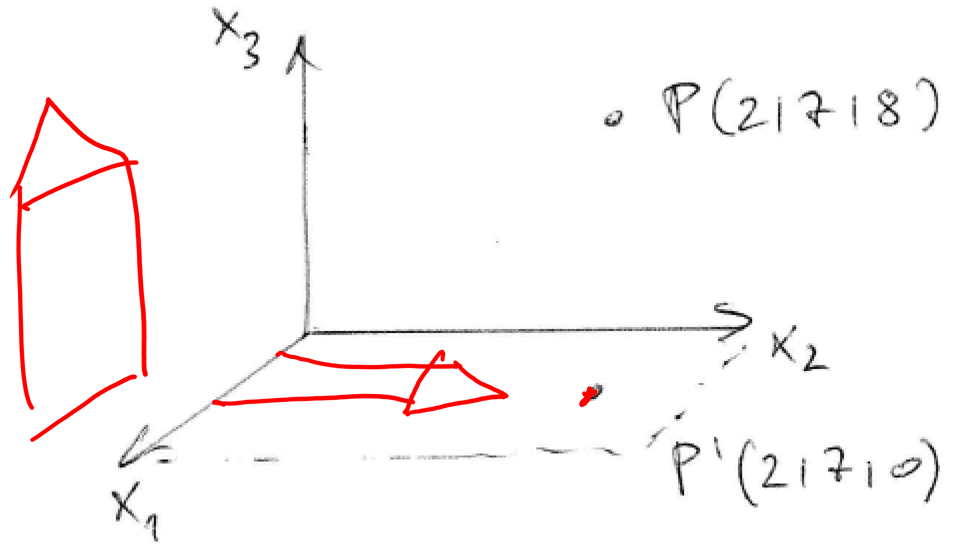
Abstand Punkt / Ebene

$$\rightarrow \left| \frac{2 \cdot 2 - 8 + 4 \cdot 2 - 1}{\sqrt{21}} \right| = \left| \frac{4 - 8 + 8 - 1}{\sqrt{21}} \right|$$

$$= \frac{3}{\sqrt{21}} \approx \underline{\underline{0{,}655}}$$

→ mit Hessescher Normalenform einfach!

Abbilden in eine Koordinatenebene



$A \cdot \vec{x} = \vec{x}\,'$

Abbilden in eine Koordinatenebene

2x3

$\cancel{(3\times 2)}$

3x1

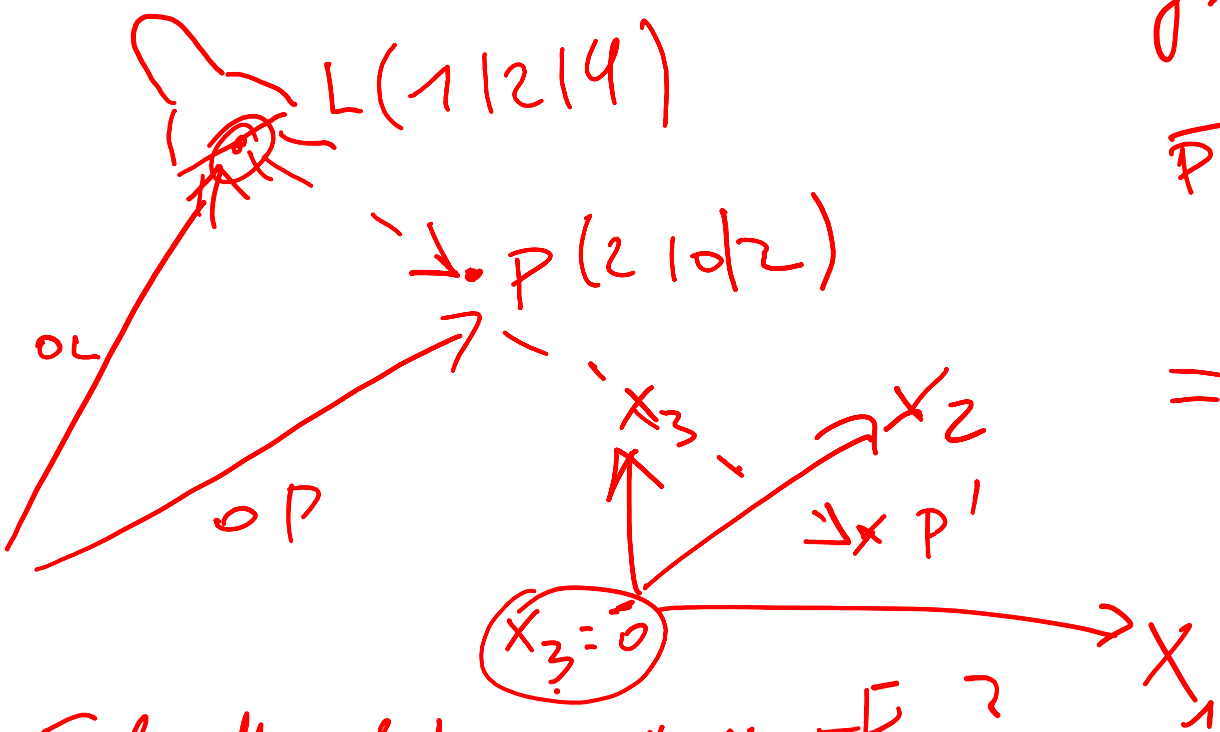
= 2x1

Beispiel:

$$\overset{3\times3}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}} \cdot \overset{3\times1}{\begin{pmatrix}2\\7\\8\end{pmatrix}} = \overset{3\times1}{\begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix}}$$

„Zeile · Spalte"

Abbilden in eine Koordinatenebene



Schattenpunkt in x_1x_2-E.?

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \quad P'$$

$$\vec{PL} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

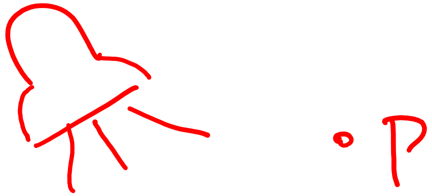
$$4 + r \cdot (-2) = x_3 = 0$$

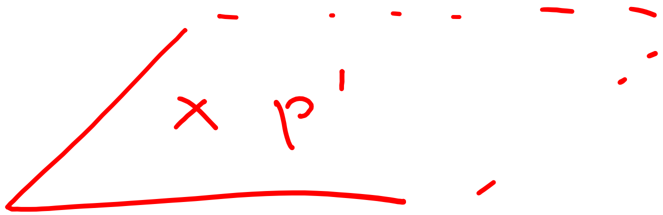
$$\Rightarrow 4 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S(3|-2|0)$$

Abbilden in eine Koordinatenebene





$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot P = P' \rightarrow \overline{\overline{A}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbilden in eine Koordinatenebene

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2a_1 + 2a_3 &= 3 \\ 2b_1 + 2b_3 &= -2 \\ 2c_1 + 2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Abbilden in eine Koordinatenebene

$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lineare Abb. gegeben:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bekannt

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Integral

$$\int \sqrt{x+1}\,dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}(x+1)^3}$$

Test: $f'\left(\sqrt{(x+1)^3}\right) = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]' = (x+1)^{\frac{1}{2}}$