

---

# Mathematik - Analytische Geometrie



## Vektorrechnung - Komplettübersicht

- Vektor- und Lagebeziehungen
- Orts- / Richtungsvektoren
- Länge eines Vektors
- Skalarprodukt
- Winkelberechnung
- Kreuzprodukt
- Mittelpunkt Strecke

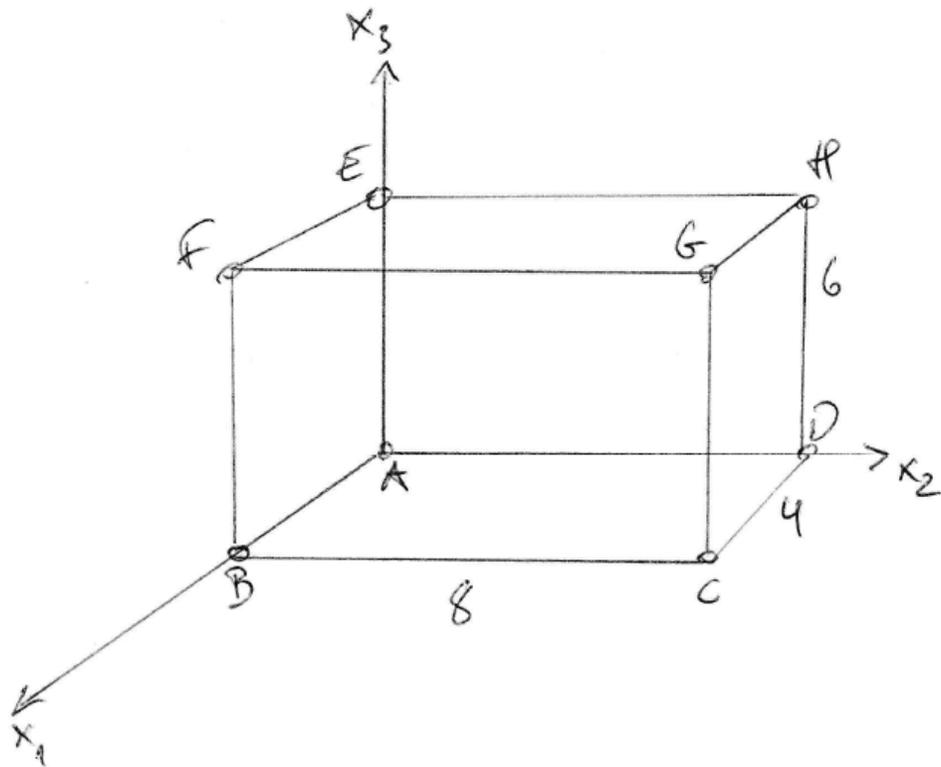


## Vektorrechnung - Komplettübersicht

- Abstand  $(P|P)$ ,  $(P|G)$ ,  $(P|E)$ ,  $(G|G)$ ,  $(G|E)$
- Lage  $G/E$ ,  $E/E$
- Punktprobe  $P/G$ ,  $P/E$
- Parameterform einer Gerade
- Parameterform, Koordinatenform, Normalenform einer Ebene



## Punkte ablesen im Koordinatensystem



A (0 | 0 | 0)  
C (8 | 4 | 0)  
E (0 | 0 | 6)  
G (8 | 4 | 6)

B (8 | 0 | 0)  
D (0 | 4 | 0)  
F (8 | 0 | 6)  
H (0 | 4 | 6)

„Rechte-Hand-Regel“

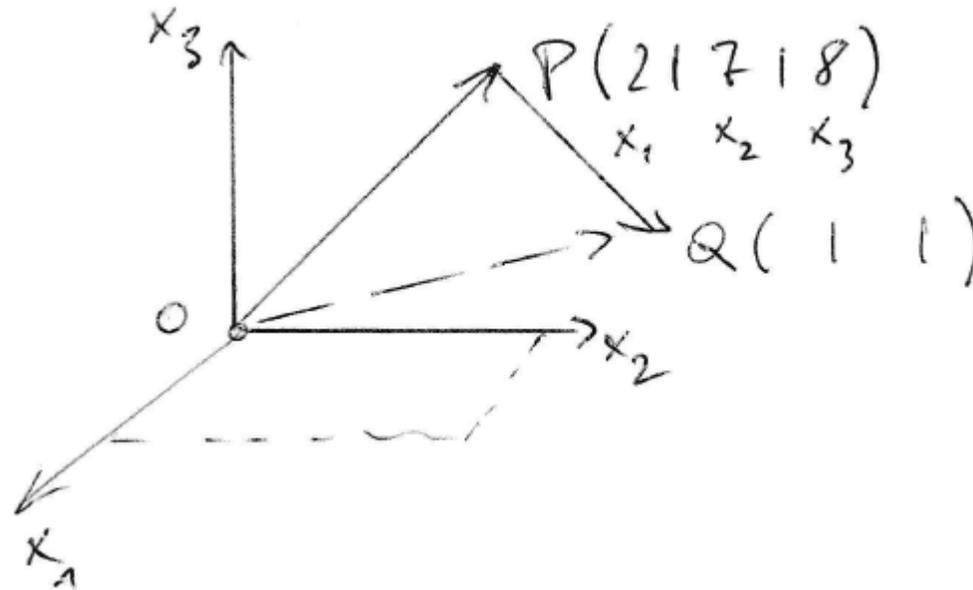


## Vektoren und ihre Repräsentanten

### Was ist ein Vektor?

- Ein Vektor beschreibt eine Verschiebung im Raum oder entlang einer Ebene
- Vektoren werden durch einen Pfeil beschrieben, der die Richtung vorgibt
- Durch einen Vektor kann man sich mathematisch „im Raum fortbewegen“
  - **Wichtig:** Unterscheidung zwischen Orts- und Richtungsvektoren

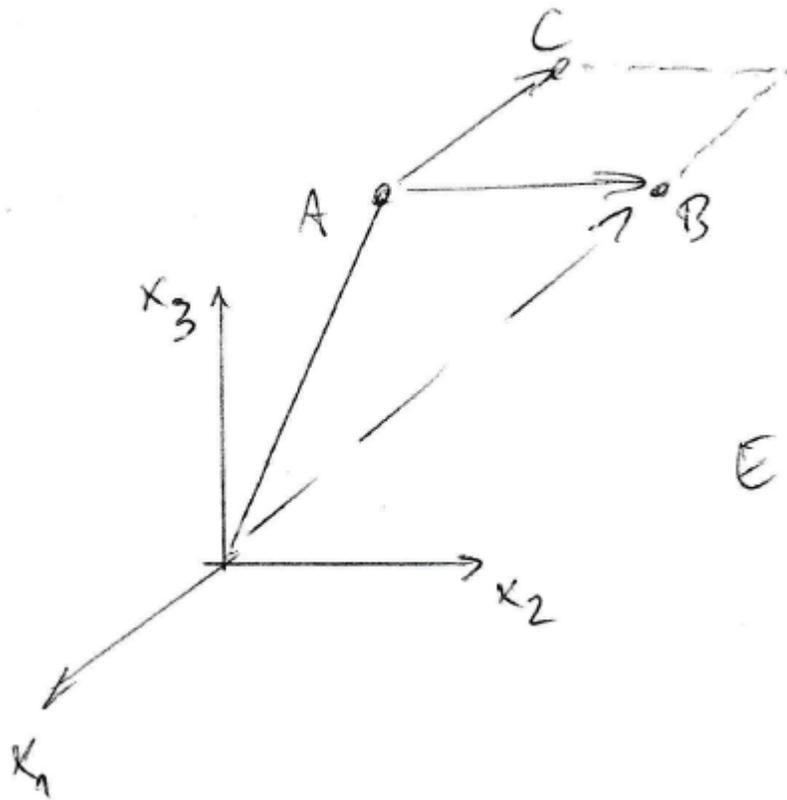
## Vektoren und ihre Repräsentanten



- Ein Ortsvektor ist **kein** Richtungsvektor!
- Ortsvektoren gehen vom Ursprungsvektor  $(0|0)$  aus, Richtungsvektoren vom jeweiligen Ortsvektor



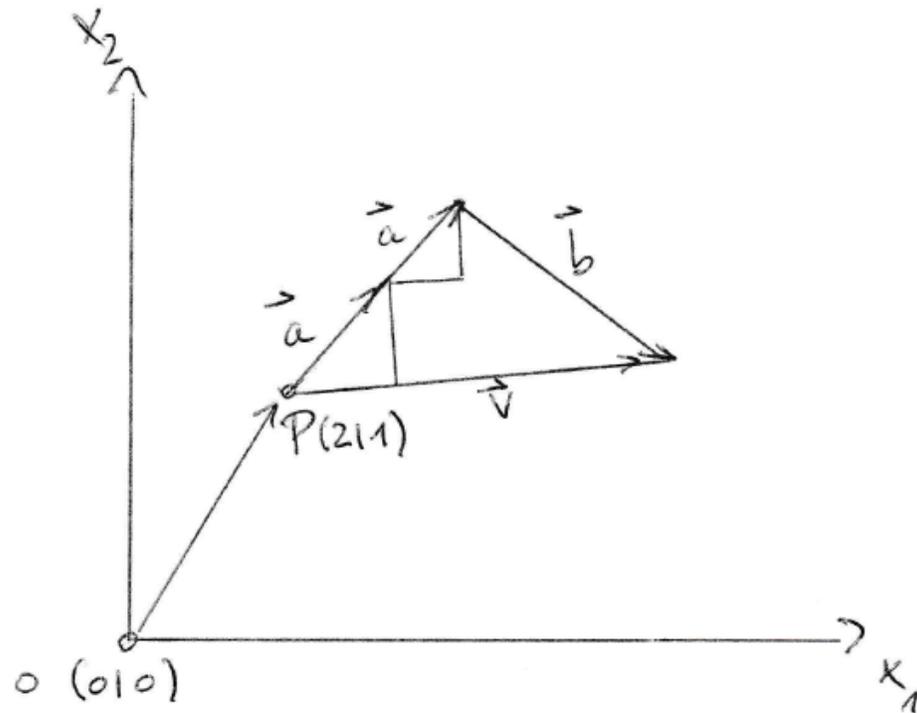
## Orts- und Richtungsvektoren



$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{a} \end{pmatrix}}_{\vec{OA}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} \end{pmatrix}}_{\vec{AB}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} \end{pmatrix}}_{\vec{AC}}$$



## Orts- und Richtungsvektoren



$$\begin{array}{l} \vec{a} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{b} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow 2 \cdot \vec{a} + \vec{b} = \vec{v}$$

$$\vec{OP} = P - O = \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Begriff des **Gegenvektors**: Gegenvektor = entgegengerichteter Vektor = ursprünglicher Vektor  $\cdot (-1)$



## Rechenoperationen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 11 \text{ (Skalar)}$$



## Kreuzprodukt / Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 6 \\ 3 - 8 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



## Kreuzprodukt / Vektorprodukt

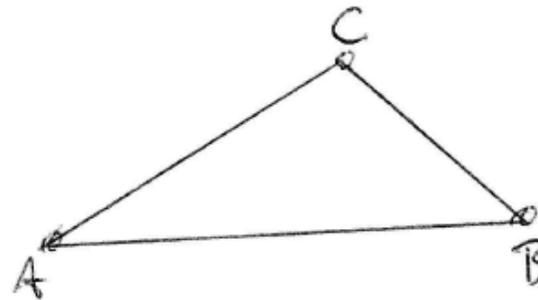
Wo kommt  $\vec{a} \times \vec{b}$  vor?

1)  $\vec{n}$  bestimmen:  $E: \vec{x} = () + r() + s()$



2) Flächeninhalt Dreieck:

$$F_D = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

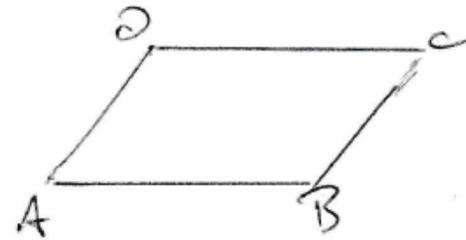




## Kreuzprodukt / Vektorprodukt

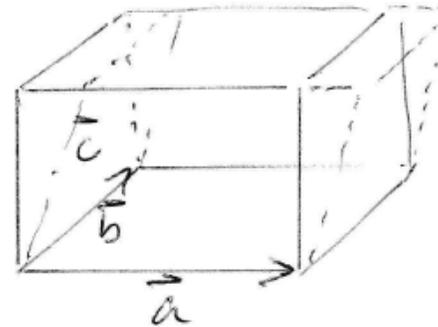
3) Flächeninhalt Parallelogramm:

$$F_P = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$



4) Spatrvolumen:

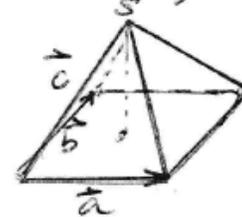
$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$





## Kreuzprodukt / Vektorprodukt

5) Volumen Pyramide :  $V = \frac{1}{3} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$





## Kreuzprodukt / Vektorprodukt

**Beispiel:** Bestimmung eines Normalenvektors

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

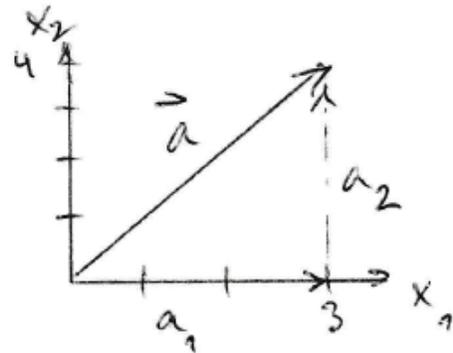
$$\text{Test: } \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$$



## Länge / Betrag eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} \\ = \sqrt{25} = 5$$



$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} \\ = \sqrt{29}$$



## Einheitsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

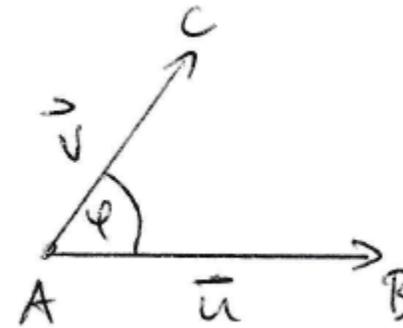
$$\Rightarrow \vec{v}_E = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Test: } |\vec{v}_E| &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{9}} = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$



## Winkel zwischen zwei Vektoren

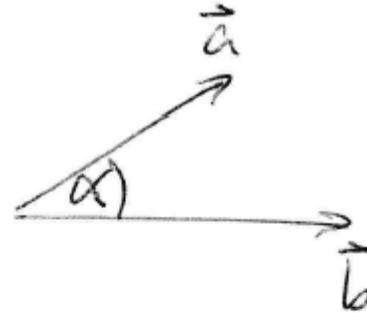
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$





## Winkel zwischen zwei Vektoren

Beispiel:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{18}}$$

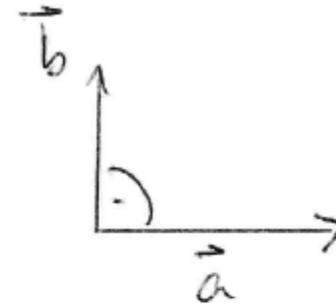
$$\Rightarrow \cos(\alpha) = 0,9428 \quad \Rightarrow \alpha = \arccos(0,9428) = \underline{\underline{19,47^\circ}}$$



## Winkel zwischen zwei Vektoren

Warum ist das Skalarprodukt zweier **orthogonaler** Vektoren = 0?

$$\text{Skalarprodukt } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow$$

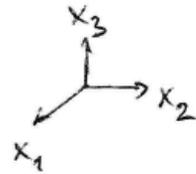
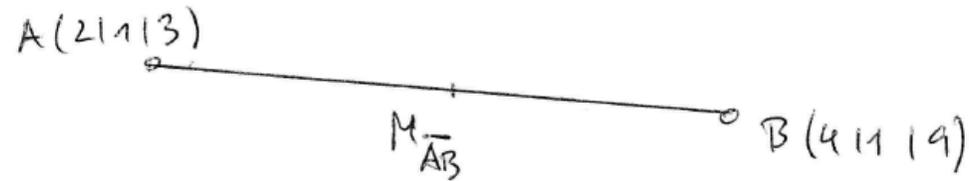


$$\rightarrow \text{weil } \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{Beispiel: } \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} = -4 + 4 = 0$$



## Mittelpunkt einer Strecke



$$1) M_{AB} = \left( \frac{a_1 + b_1}{2} \mid \frac{a_2 + b_2}{2} \mid \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

$$\text{Hier: } M_{AB} = \left( \frac{2+4}{2} \mid \frac{1+1}{2} \mid \frac{3+9}{2} \right)$$



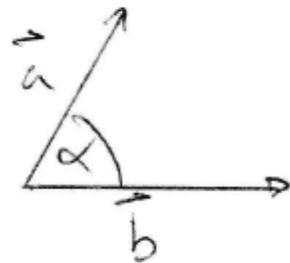
## Mittelpunkt einer Strecke

$$2) \quad \underset{(\vec{OM})}{\vec{m}_{AB}} = \underset{(\vec{OA})}{\vec{a}} + \frac{1}{2} \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{AB} = (3 \mid 1 \mid 6)$$



## Winkelbeziehungen



$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



## Winkelbeziehungen



$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{v}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



## Winkelbeziehungen

Beispiel:  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -3$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$



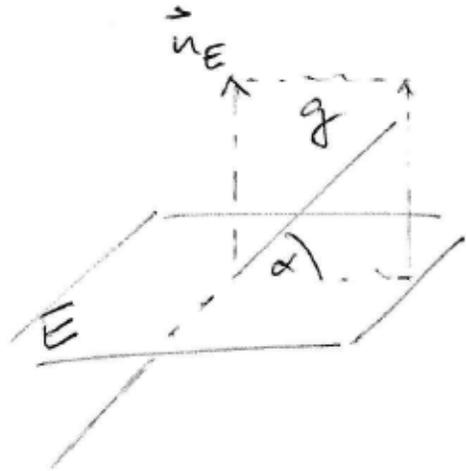
## Winkelbeziehungen

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{|-3|}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \underline{\underline{54,74^\circ}}$$

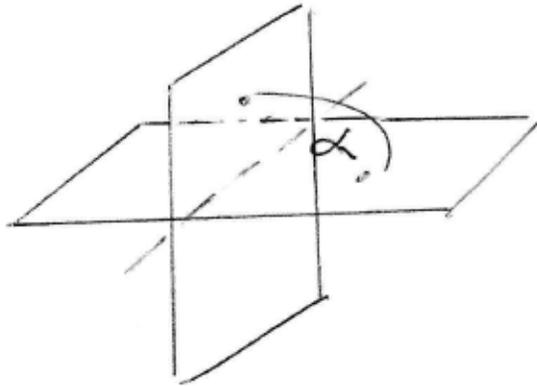


## Winkelbeziehungen



„RV“ = Richtungsvektor

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{RV}_g|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{RV}_g|}$$



$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$



## Lagebeziehungen



kollinear, linear abhängig



linear unabhängig



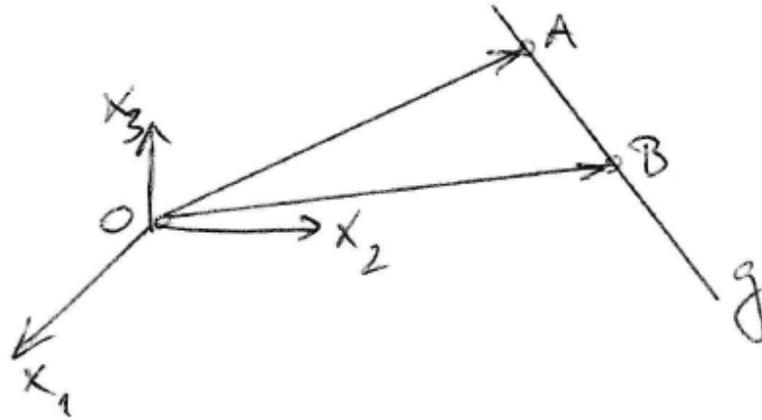
koplanar, linear abhängig



linear unabhängig



## Parameterform einer Gerade



„ Ortsvektor +  $\lambda$  · Richtungsvektor “

$$\begin{aligned}\rightarrow g: \vec{x} &= \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{AB} \\ &= \vec{OA} + \lambda \cdot [\vec{OB} - \vec{OA}]\end{aligned}$$



## Lotfußpunktverfahren



$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

•  $P(2|2|2)$        $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$        $L(2,5|1|1,5)$

$$\left[ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Gerade}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Punkt}} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$



## Lotfußpunktverfahren

$$\Rightarrow \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} r \\ -1 \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow r \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (r-1) \cdot 1$$

$$= r + r - 1 = 2r - 1 = 0 \Leftrightarrow 2r = 1$$



## Lotfußpunktverfahren

$\Leftrightarrow r = 0,5 \rightarrow$  Einsetzen für  $r$  in  $g: \vec{x}$

$$\Rightarrow \vec{PL} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

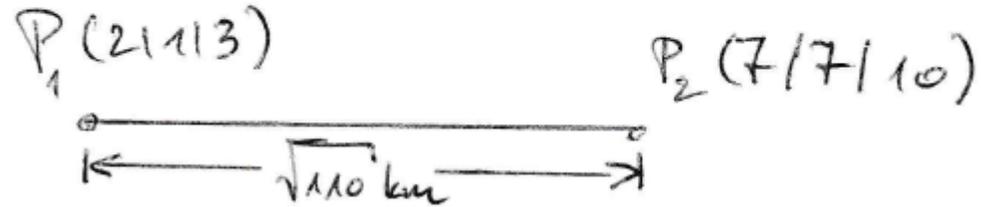
$$|\vec{PL}| = \sqrt{0,5^2 + (-1)^2 + (-0,5)^2} = \sqrt{1,5} \approx \underline{\underline{1,22}}$$



## Rechnungen mit Geraden

Beispielaufgabe:

$$v = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



Wo ist der Ballon nach 40 min?

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ \vec{u} \end{pmatrix} \quad |\vec{u}| = \sqrt{110} \approx 10,49$$



## Rechnungen mit Geraden

$$L^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{110}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1 km Länge („normiert“)

→ 30 km in einer Std. ⇒ 20 km in 40 min

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{110}} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{20}{\sqrt{110}} \cdot 5 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$



## Ebenen: Parameter- in Koordinatenform

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x_1 = 2 + 1r + 2s \\ \text{II} \quad x_2 = 1 + 1r - 1s \\ \text{III} \quad x_3 = 1 - 1r + 3s \end{array} \begin{array}{l} \uparrow - \\ \uparrow + \end{array}$$

---

$$x_2 - x_1 = -1 - 3s$$

$$x_3 + x_2 = 2 + 2s$$

---

$$\begin{array}{l} | \cdot 2 \\ | \cdot 3 \end{array} \downarrow +$$



## Ebenen: Parameter- in Koordinatenform

$$2 \cdot (x_2 - x_1) + 3(x_3 + x_2) = -2 + 6$$

$$\Rightarrow \underline{2x_2} - 2x_1 + 3x_3 + \underline{3x_2} = 4$$

$$\Leftrightarrow -2x_1 + \underline{5x_2} + 3x_3 = 4$$

→ „Hessesche Normalenform“

Form:  $\vec{x} \cdot \vec{n}_0 - d = 0$

↑  $\vec{n}_0$  normierter Einheitsvektor  
↑ Abstand Koordinatenausprägung



## Ebenen: Koordinaten- in Parameterform

$$E: \vec{x} = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$$

$$\rightarrow S_1 \quad (6 \ 10 \ 10) \quad 2x_1 = 12$$

$$S_2 \quad (0 \ 1 \ 3 \ 1 \ 0) \quad 4x_2 = 12$$

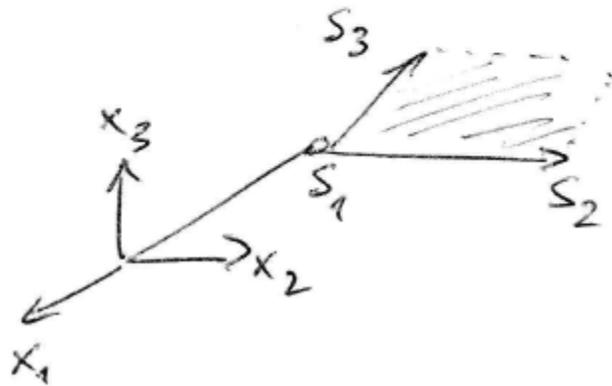
$$S_3 \quad (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 4) \quad 3x_3 = 12$$



## Ebenen: Koordinaten- in Parameterform

Ebene „aufspannen“:

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{OS_1} + \underbrace{r \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{S_1 S_2} + \underbrace{s \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{S_1 S_3}$$





## Lage zwischen Gerade und Ebene

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



## Lage zwischen Gerade und Ebene

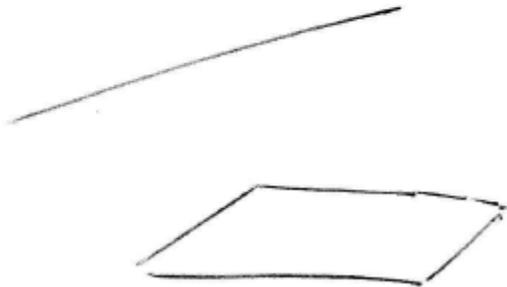
$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \text{I} \quad & 1r - 0s - 7t = 1 \\ & \text{II} \quad 1r - 1s + 3t = -1 \\ & \text{III} \quad 1r - 1s - 4t = -3 \\ & \dots \end{aligned}$$



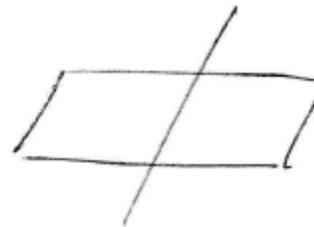
## Lage zwischen Gerade und Ebene

3 Fälle:

$$0 = 8$$



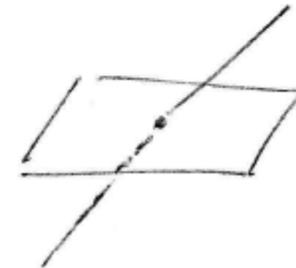
$$0 = 0$$



$$t = 2$$

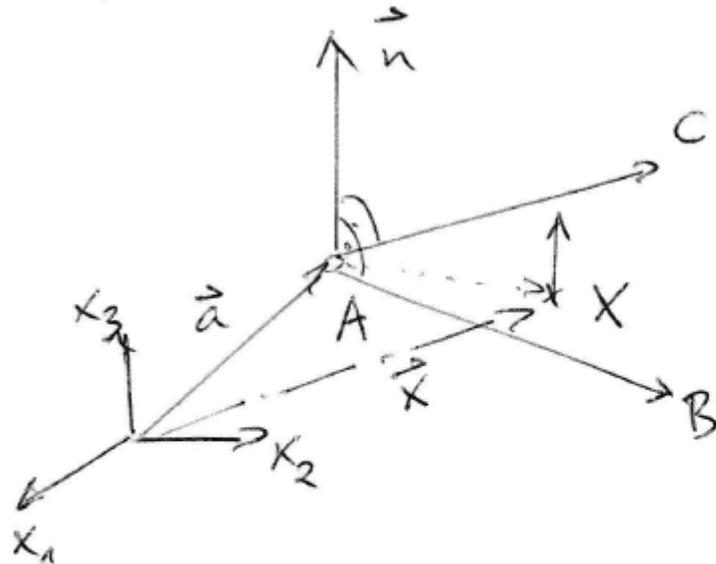
$$s = 4$$

$$r = 1$$





## Normalenform / Koordinatenform



$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$$

Es gilt:  $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$



## Normalenform / Koordinatenform

Beispiel:  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

1)  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Aufpunktvektor derselbe wie bei  
Parameterform

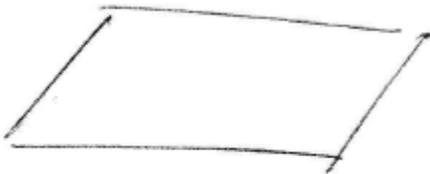
3)  $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$

$\vec{x}$



## Abstand Punkt / Ebene

•  $P(2|8|2)$



$$E: 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} \\ = \sqrt{21}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2x_1 - x_2 + 4x_3 - 1}{\sqrt{21}} \right| = d(P; E)$$



## Abstand Punkt / Ebene

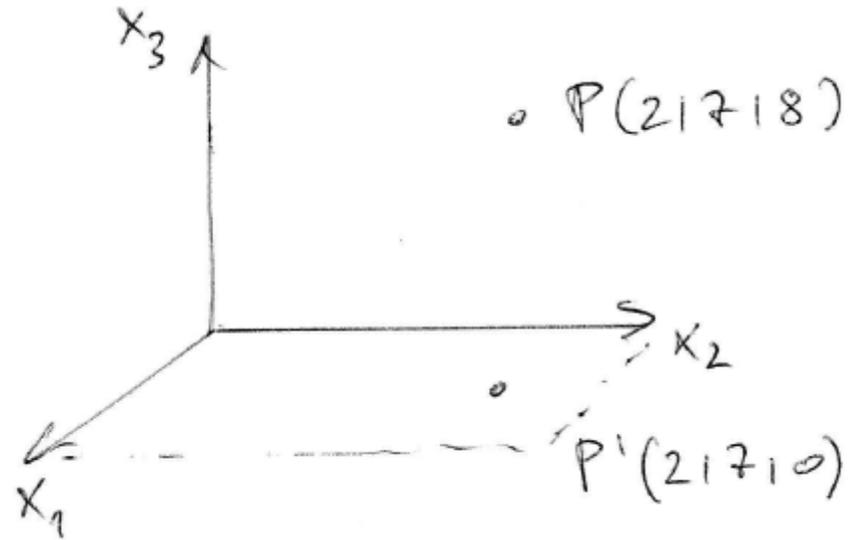
$$\rightarrow \left| \frac{2 \cdot 2 - 8 + 4 \cdot 2 - 1}{\sqrt{21}} \right| = \left| \frac{4 - 8 + 8 - 1}{\sqrt{21}} \right|$$

$$= \frac{3}{\sqrt{21}} \approx \underline{\underline{0,655}}$$

→ mit Hessescher Normalenform einfach!



## Abbilden in eine Koordinatenebene



$$A \cdot \vec{x} = \vec{x}'$$



## Abbilden in eine Koordinatenebene

Beispiel:

$$\begin{matrix} & 3 \times 3 & & 3 \times 1 & & 3 \times 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

„Zeile · Spalte“