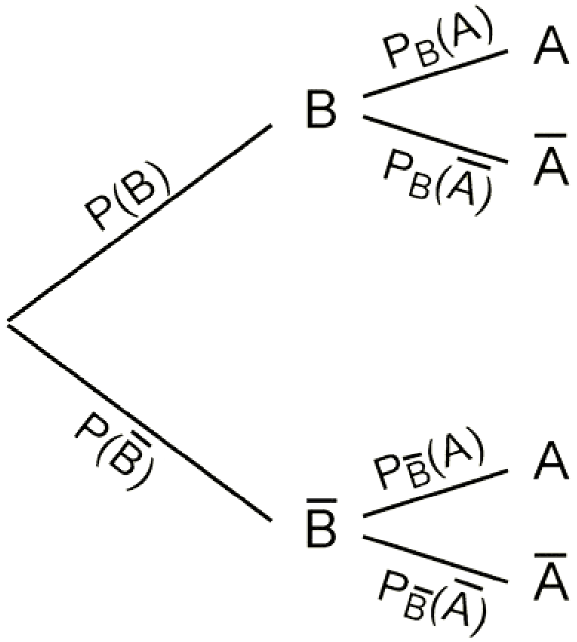
Mathematik - Stochastik

Stochastik - Komplettübersicht

- Baumdiagramm und Vierfeldertafel
- Absolute / bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Absolute / relative Häufigkeiten
- Binomialverteilung, Kumulierte Verteilung („genau…, mindestens…, höchstens…“)
- Kombinatorik
- Erwartungswert, Standardabweichung (Laplace-Bedingung), Sigma-Umgebung, Konfidenzintervall
- Hypothesentests (linksseitig, rechtsseitig, beidseitig)

Baumdiagramm und Vierfeldertafel



Baumdiagramm und Vierfeldertafel

Absolute und relative Häufigkeiten

- Absolute Häufigkeit: „Wie oft kommt etwas vor?“
  - Beispiel: Notenspiegel
- Relative Häufigkeit = Absolute Häufigkeit / Anzahl aller Häufigkeiten
  - Beispiel: Notenverteilung

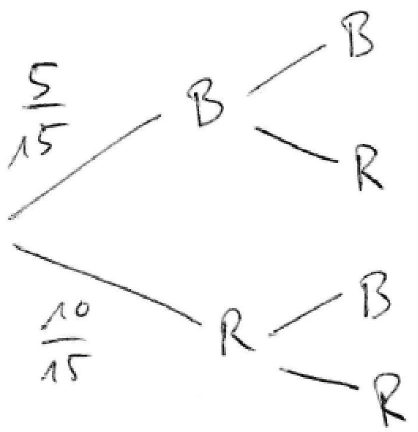
Baumdiagramm und Vierfeldertafel

5 BLAUE Kugeln

10 ROTE Kugeln

15

mit Zurücklegen



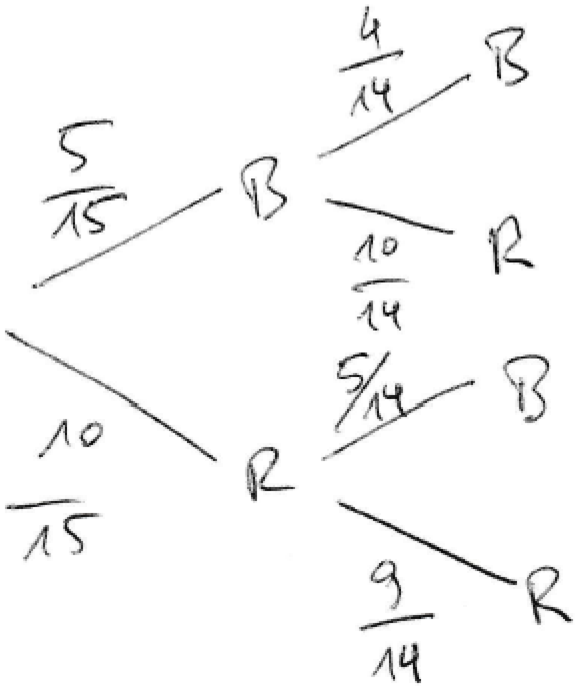
$$(BB) = \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}$$

$$+$$

$$(RR)\ \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15}$$

$$P(\text{gleiche Farbe}) = \overline{\qquad\qquad} \quad \Sigma$$

Baumdiagramm und Vierfeldertafel



ohne Zurücklegen

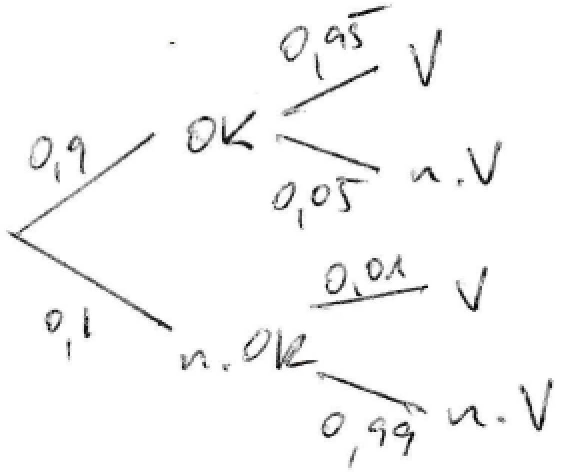
⋮

Baumdiagramm und Vierfeldertafel

90% der Schrauben sind ok

→ Von diesen werden 95% verkauft

→ Von den kaputten werden 1% verkauft



0,855	$P(OK \cap V)$
0,045	$P(OK \cap n.V)$
0,001	$P(n.OK \cap V)$
0,099	$P(n.OK \cap n.V)$

Baumdiagramm und Vierfeldertafel

	OK	n.OK		
V	0,855	0,001	0,856	P(V)
n.V.	0,045	0,099	0,144	P(n.V.)
	0,9	0,1	1	
	P(OK)	P(n.OK)		

Baumdiagramm und Vierfeldertafel

1. Schraube ist verkauft und OK

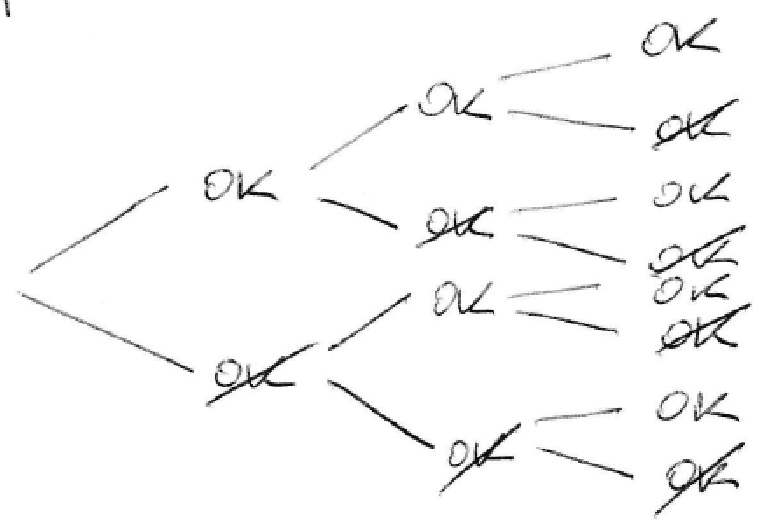
2. Schraube ist verkauft

3. Eine verkaufte Schraube ist OK

$$P_V(OK) = \frac{P(V \cap OK)}{P(V)} = \frac{0{,}855}{0{,}856} = 0{,}9988$$

Baumdiagramm und Vierfeldertafel

Schraubenproduktion:



- mit Zurücklegen
- 2 Wahrscheinlichkeiten (WK)

Baumdiagramm und Vierfeldertafel

WK, dass von 3... <u>genau</u> 2 ok sind

I → ok → ok → ~~ok~~ : $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1$

II → ok → ~~ok~~ → ok : $0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9$

III → ~~ok~~ → ok → ok : $0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9$

$3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1$

Baumdiagramm und Vierfeldertafel

$$P(x=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\rightarrow P(x=2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}9^2 \cdot (1-0{,}9)^{3-2}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit (Satz von Bayes)

Für zwei Ereignisse A und B, für $B \neq 0$, lautet das Satz von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- $P(A|B)$ ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist
- $P(B|A)$ ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist
- $P(A)$ ist die Anfangswahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A
- $P(B)$ ist die Anfangswahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B

Bedingte Wahrscheinlichkeit (Satz von Bayes)

Beispiel:

Ein Drogentest hat eine Spezifität von 99% und eine Sensitivität von ebenfalls 98,5%.

- d. h., dass die Testergebnisse zu 99% für Drogenkonsumenten korrekt sein werden und zu 98,5% für diejenigen, die keine Drogen zu sich genommen haben

Wir wissen, dass 0,5% der getesteten Menschen Drogen zu sich genommen haben.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person, die positiv getestet wurde, auch tatsächlich Drogen konsumiert hat?

Bedingte Wahrscheinlichkeit (Satz von Bayes)

Aus dem Satz von Bayes ergibt sich Folgendes:

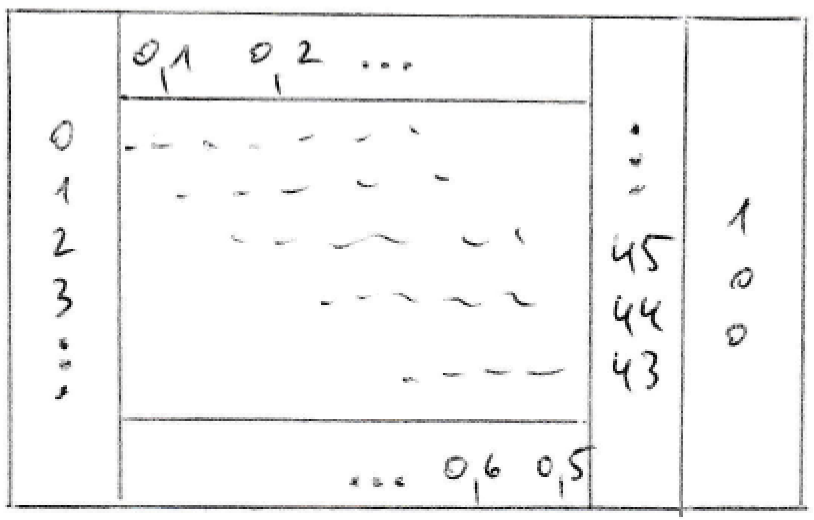
$$
\begin{aligned}
P(\text{Drogensüchtig}|+) &= \frac{P(+|\text{Drogensüchtig})P(\text{Drogensüchtig})}{P(+|\text{Drogensüchtig})P(\text{Drogensüchtig}) + P(+|\text{nicht Drogensüchtig})P(\text{nicht Drogensüchtig})} \\
&= \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.99 \cdot 0.005 + 0.015 \cdot 0.995} \\
&\approx 0{,}2490
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand der positiv getestet wurde die Droge auch tatsächlich konsumiert hat, liegt gerade mal bei **24,9%**!

Binomialverteilungen, kumulierte Verteilungen

$B(n;p;k)$

$F(n;p;k)$



Gleiches Schema, aber kumuliert!

Also von 0 bis zum k

Binomialverteilungen, kumulierte Verteilungen

Beispiel: Von 100 Leuten ($p = 0{,}2$ f. Raucher) sind

a) genau 3 Raucher

b) höchstens 3 Raucher

a) $P(X=3) = \binom{100}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{97} = B(100; 0{,}2; 3)$

b) $P(X \leq 3) = F(100; 0{,}2; 3)$

Binomialverteilungen, kumulierte Verteilungen

WK für eine defekte Schraube: 5 %

100 Schrauben werden untersucht...

a) genau 7 defekte

b) höchstens 7 defekte

c) mindestens 7 defekte

d) mehr als 2, aber weniger als 10 defekte

$n = 100$

$p = 0{,}05$

$k = ?$

Binomialverteilungen, kumulierte Verteilungen

a) $P(x=7) = B(100; 0{,}05; 7) = \binom{100}{7} \cdot 0{,}05^{7} \cdot 0{,}95^{93}$

b) $P(x \leq 7) = F(100; 0{,}05; 7)$

oder $\sum_{0}^{7} \binom{100}{x} \cdot 0{,}05^{x} \cdot 0{,}95^{100-x}$

c) $P(x \geq 7) = 1 - P(x \leq 6) = 1 - F(100; 0{,}05; 6)$

oder $\sum_{7}^{100} \binom{100}{x} \cdot 0{,}05^{x} \cdot 0{,}95^{100-x}$

d) $P(3 \leq x \leq 9) = F(100; 0{,}05; 9) - F(100; 0{,}05; 2)$

Kombinatorik

1) Zahlenschloss: 4 Ziffern, 0 - 9

$\underline{2}\ \underline{8}\ \underline{0}\ \underline{9}$

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

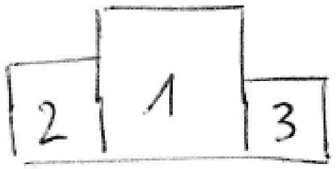
→ Reihenfolge wichtig? Ja

→ Wdh.? Ja

→ $n^k = 10^4$ Möglichkeiten

Kombinatorik

2) 10 Rennläufer auf Plätzen 1–3



$9 \cdot 10 \cdot 8$

→ Reihenfolge? Ja

→ Wdh. Nein

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

$$= \boxed{nPR}$$

Kombinatorik

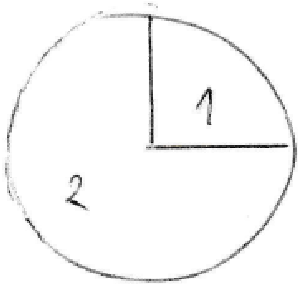
3) Von 10 Personen werden 3 zufällig ausgewählt:

→ Reihenfolge? Nein

→ Wdh.? Nein

$$\binom{n}{k} = \binom{10}{3} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \boxed{nCR}$$

Erwartungswert



Einsatz: 5 €

E_1: 20 € Auszahlung

E_2: 3 € –"–

→ Erwarteter Gewinn?

→ X: Gewinn in €

x_i	+ 15 €	− 2 €
$P(X=x_i)$	0,25	0,75

Erwartungswert

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x=x_i) = E(x)$$

$$E(x) = 0{,}25 \cdot 15 + 0{,}75 \cdot (-2) = 2{,}25$$

$\rightarrow$ Fair ist ein Spiel nur, wenn $E(x) = 0$!

Erwartungswert

Beispiel:

Tasche OK : 90 %
Tasche mit Farbfehler : 5 %
Tasche mit Verschlussfehler : 3 %
Tasche mit V. und F. : 2 %

Kosten je Tasche : 80 €
Erlös je Tasche : 150 €
Farb- od. Verschl.f. : +30 € auf Kosten
Beides : neue Tasche

Erwartungswert

Erwarteter Gewinn? (X: Gewinn in €)

x_i	70	40	40	−10
$P(x_i)$	0,9	0,05	0,03	0,02

$$E(x) = 0{,}9 \cdot 70 + 0{,}05 \cdot 40 + 0{,}03 \cdot 40 + 0{,}02 \cdot (-10)$$
$$= 66 €$$

- „Spiel“ ist **nicht** fair. Ein Unternehmen möchte ja einen Erwartungswert > 0…

Standardabweichung / Sigma-Umgebung

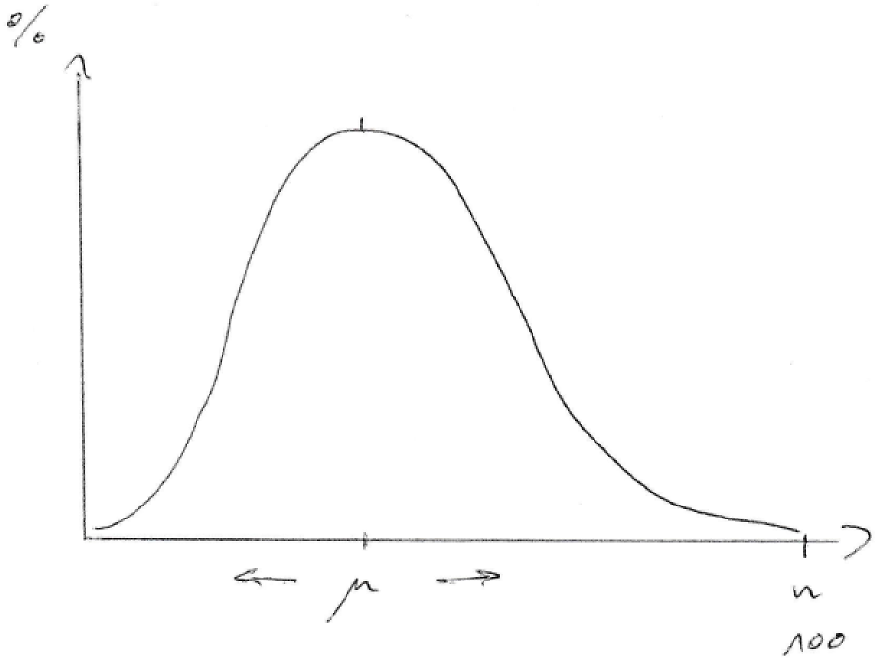
$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 68{,}3\%$$

$$P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) = 90\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 95{,}4\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 99{,}7\%$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$



Konfidenzintervall

Würfel 4000-mal werfen. 700-mal soll eine 6 fallen. Sicherheit 99,7 %

Relative Häufigkeit $h_n = \frac{X}{n} = \frac{700}{4000} = 0{,}175$

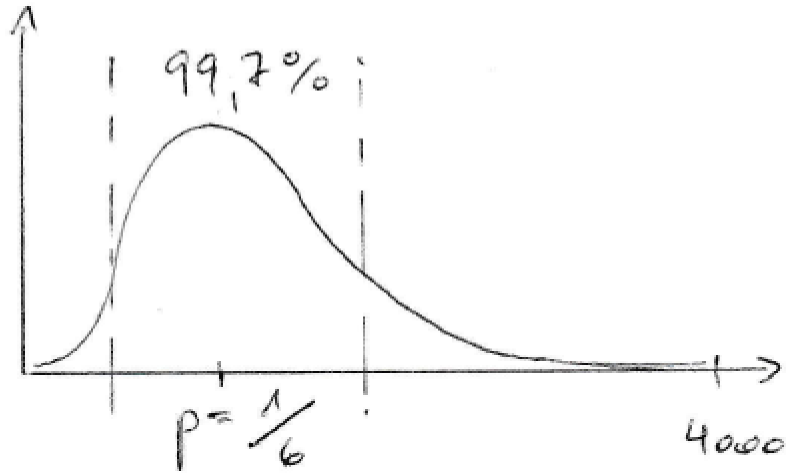
$$\frac{X}{n} \in \left[p - 3\frac{\sigma}{n} \, ; \, p + 3\frac{\sigma}{n}\right]$$

Konfidenzintervall

$$\left| \frac{X}{n} - p \right| \overset{!}{\leq} 3 \frac{\sigma}{n}$$

$$\left| 0{,}175 - p \right| \leq 3 \cdot \frac{\sqrt{4000\,p(1-p)}}{4000}$$

$$(0{,}175 - p)^2 \leq 9 \cdot \frac{p(1-p)}{4000}$$



Konfidenzintervall

$$0{,}030625 - 0{,}35p + p^2 \leq 9\,\frac{p\cdot(1-p)}{4000}$$

$$\rightarrow 122{,}5 - 1400p + 4000p^2 \leq 9p - 9p^2$$

$$\Rightarrow 4009p^2 - 1409p + 122{,}5 \leq 0$$

$$\rightarrow p_1 = 0{,}1937 \qquad p_2 = 0{,}1577$$

Konfidenzintervall

- Wahrscheinlichkeit p mittels pq-Formel / Mitternachtsformel / quadratischer Ergänzung bestimmen ist die **genauste** Variante
- *Weitere Möglichkeit*: Statt p auszurechnen kann man auch die **relative Häufigkeit** einsetzen (in unserem Beispiel $h_n = 0{,}175$) und vergleichen, meist hinreichend genau!

Hypothesentests

Was sind Hypothesentests?

- Anhand einer **Stichprobe** herausfinden, ob eine Vermutung (Hypothese) wahr ist
  - Man stellt zuerst eine Nullhypothese N_0 auf
  - Dann gibt man ein Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) vor und bestimmt den Ablehnungsbereich
  - Stichprobe ziehen
  - Nach Test festlegen, ob Aussage **angenommen** oder **verworfen** werden muss

Hypothesentests

Fehler beim Testen von Hypothesen

- Nach gezogener Stichprobe ist man nun zu einem Ergebnis gekommen…
  - Es kann passieren, dass eine Hypothese als falsch angesehen wird, obwohl sie von Anfang an richtig war (**Fehler 1. Art**, α-Fehler)
  - Oder eine Hypothese ist falsch, wurde aber irrtümlich **nicht** verworfen, weil das Stichprobenergebnis noch im Annahmebereich liegt (**Fehler 2. Art**, β-Fehler)

Hypothesentests

Linksseitiger Hypothesentest

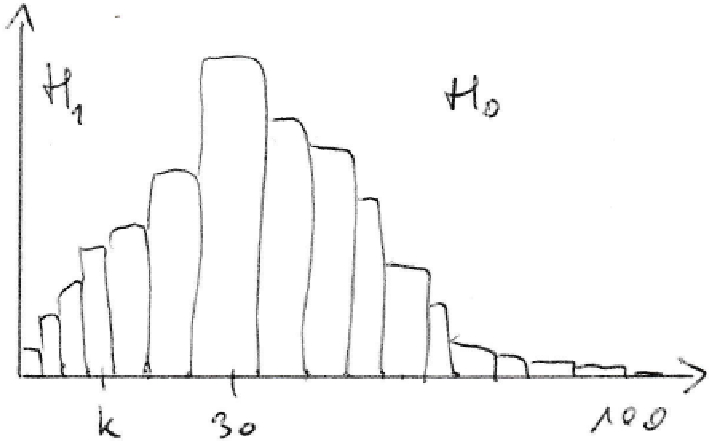
Mindestens 30% der Schüler lernen mit Videos. 100 werden befragt ($\alpha = 5\%$)

$H_0: p_0 \geq 0{,}3$

$H_1: p_1 < 0{,}3$

$\alpha = 0{,}05$

$n = 100$



Hypothesentests

Linksseitiger Hypothesentest

$$P(X \leq k_{links}) \leq \overbrace{0{,}05}^{\alpha}$$

$$F(100;\, 0{,}3;\, k_{links}) \leq 0{,}05$$

Test in Tabelle:

$$F(100;\, 0{,}3;\, 21) = 0{,}0288$$

$$F(100;\, 0{,}3;\, \underline{\underline{22}}) = 0{,}0479 \quad \checkmark$$

$$F(100;\, 0{,}3;\, 23) = 0{,}0755 \quad \times$$

Ablehnen / Verwerfen $\overline{A} = \{0 \ldots 22\}$

Hypothese bestätigt $A = \{23 \ldots 100\}$

Hypothesentests

Rechtsseitiger Hypothesentest

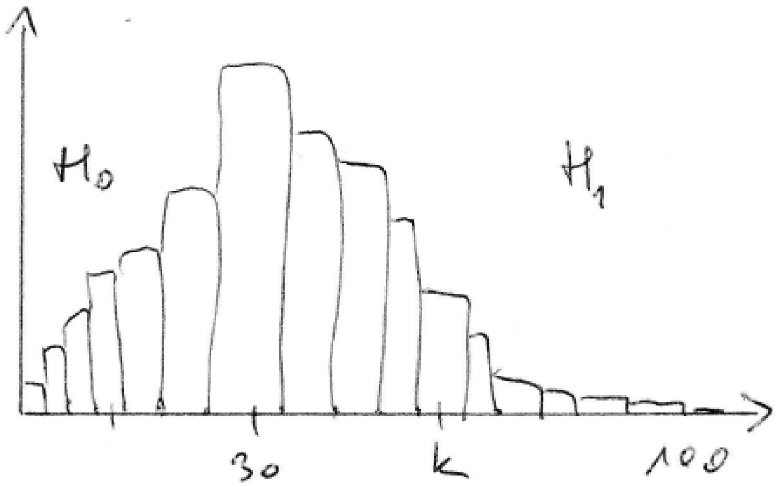
Höchstens 30% der Schüler lernen mit Videos. 100 werden befragt ($\alpha = 5\%$)

$H_0: p_0 \leq 0{,}3$

$H_1: p_1 > 0{,}3$

$\alpha = 0{,}05$

$n = 100$



Hypothesentests

Rechtsseitiger Hypothesentest

$$P(X \geq k_{rechts}) \leq \overset{\alpha}{\overbrace{0{,}05}}$$

$$1 - P(X \leq k_{rechts} - 1) \leq 0{,}05$$

$$0{,}95 \leq P(X \leq k_{rechts} - 1)$$

$$0{,}95 \leq F(100;\ 0{,}3;\ k_{rechts} - 1)$$

$$0{,}947 = F(100;\ 0{,}3;\ 37)$$

$$0{,}966 = F(100;\ 0{,}3;\ 38) \quad ✓$$

→ Ablehnen / Verwerfen : $\bar{A} = \{39 \dots 100\}$

Annehmen : $A = \{0 \dots 38\}$

Hypothesentests

Zweiseitiger Hypothesentest

30 % der Schüler lernen mit Videos.

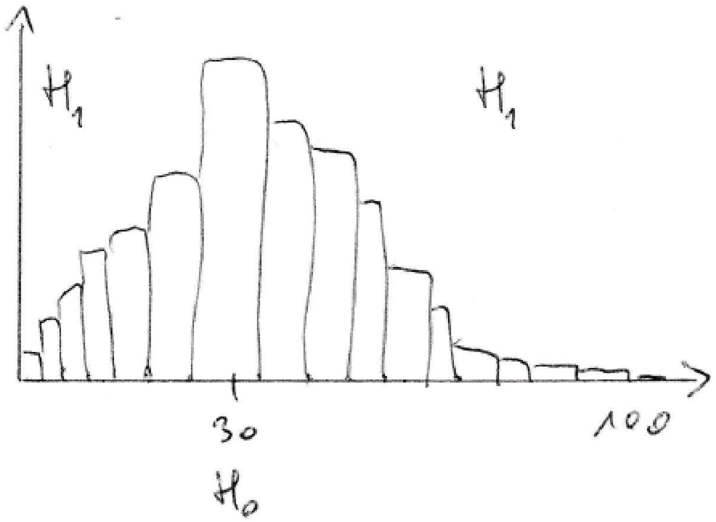
100 werden befragt ($\alpha = 5\%$)

$H_0: p_0 = 0{,}3$

$H_1: p_1 \neq 0{,}3$

$\alpha = 0{,}05$

$n = 100$



Hypothesentests

Zweiseitiger Hypothesentest

$\rightarrow P(X \leq k_l) \leq 0{,}025$! $P(X \geq k_r) \leq 0{,}025$

$F(100; 0{,}3; k_l) \leq 0{,}025$ $0{,}975 \leq F(100; 0{,}3; k_r - 1)$

$F(100; 0{,}3; 20) = 0{,}0165$ $0{,}979 = F(100; 0{,}3; 39)$

$\bar{A} = \{0 \ldots 20\}$ $\bar{A} = \{40 \ldots 100\}$

$A = \{21 \ldots 39\}$

Hypothesentests

Beispiel:

Mindestens 96 % der Ware ist OK.

→ Aussage wird bezweifelt und soll getestet werden.

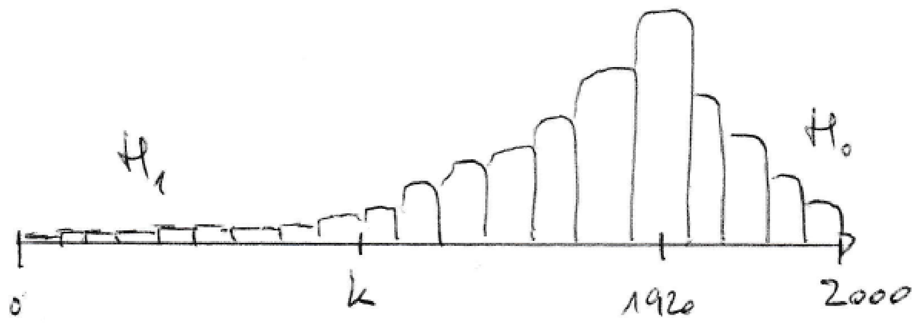
→ 2000 Stück, Irrtumswahrscheinl. 5 %

$H_0: p_0 \geq 0{,}96$ $\quad n = 2000$

$H_1: p_1 < 0{,}96$ $\quad \alpha = 0{,}05$

$\sigma = \sqrt{2000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04} = 8{,}76 > 3$ ✓

Hypothesentests



α	1 %	5 %	10 %
Wert	2,33	1,64	1,28

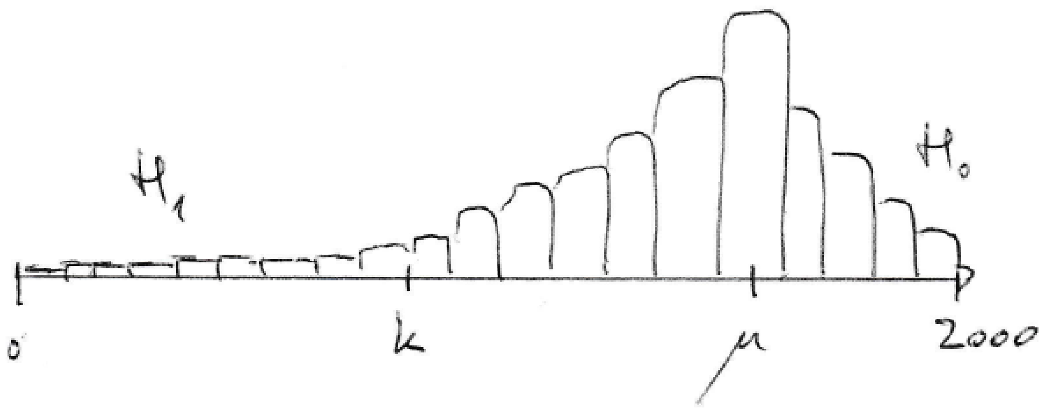
$k = \mu \pm \text{Wert} \cdot \sigma$

$\rightarrow k = 1920 - 1{,}64 \cdot 8{,}76 = 1905{,}63$

$\rightarrow \bar{A} = \{0 \ldots\ldots 1905\}$ $\quad A = \{1906 \ldots 2000\}$

Hypothesentests

70% wählen Mathe als ihr Lieblingsfach.
Ihr behauptet es seien weniger. 2000 Schüler
werden gefragt. $\alpha = 5\%$

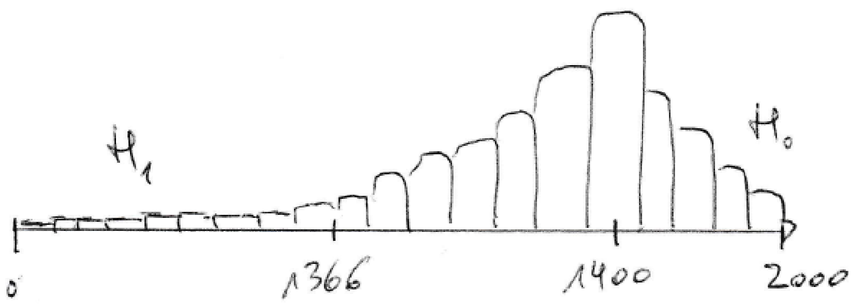


Hypothesentests

$k = \mu \pm \text{Wert} \cdot \sigma$

$\sigma = \sqrt{2000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = 20{,}49 > 3$ ✓

$\bar{A} = \{0 \ldots 1366\}$ $A = \{1367 \ldots 2000\}$



→ $N = \frac{1366{,}39}{2000} = 0{,}683$

→ Tatsächlich nur 68 %, die Mathe wählen.

Hypothesentests

$$\beta = P(X \geq 1367) = 1 - P(X \leq 1366)$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{1366 - 2000 \cdot 0{,}68 + 0{,}5}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}68 \cdot 0{,}32}}\right)$$

$$= 1 - \phi(1{,}26) = 0{,}1038 = 10{,}38\,\%$$

- Bestimmung Fehler 2. Art mittels ϕ-Funktion