

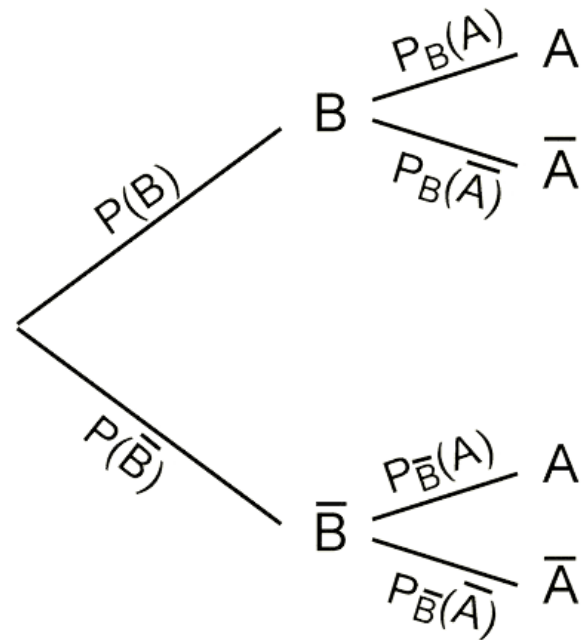
Mathematik - Stochastik

Stochastik - Komplettübersicht

- Baumdiagramm und Vierfeldertafel
- Absolute / bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Absolute / relative Häufigkeiten
- Binomialverteilung, Kumulierte Verteilung („genau..., mindestens..., höchstens...“)
- Kombinatorik
- Erwartungswert, Standardabweichung (Laplace-Bedingung), Sigma-Umgebung, Konfidenzintervall
- Hypothesentests (linksseitig, rechtsseitig, beidseitig)



Baumdiagramm und Vierfeldertafel





Baumdiagramm und Vierfeldertafel

Absolute und relative Häufigkeiten

- Absolute Häufigkeit: „Wie oft kommt etwas vor?“
 - Beispiel: Notenspiegel
- Relative Häufigkeit = Absolute Häufigkeit / Anzahl aller Häufigkeiten
 - Beispiel: Notenverteilung

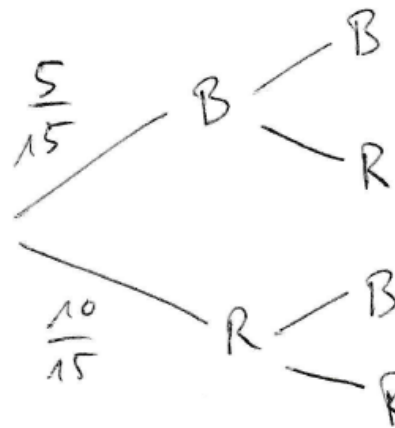


Baumdiagramm und Vierfeldertafel

5 BLAUE Kugeln
10 ROTE Kugeln

(15)

mit Zurücklegen



$$(BB) = \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}$$

+

$$(RR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15}$$

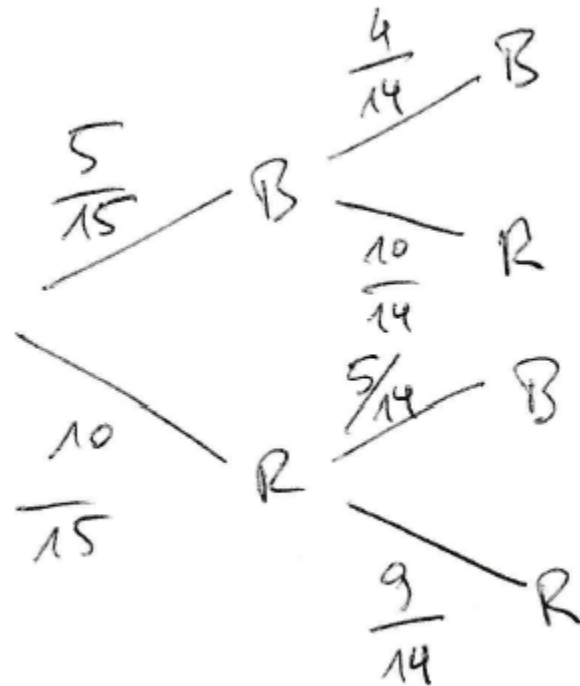
$P(\text{gleiche Farbe})$

=

Σ



Baumdiagramm und Vierfeldertafel



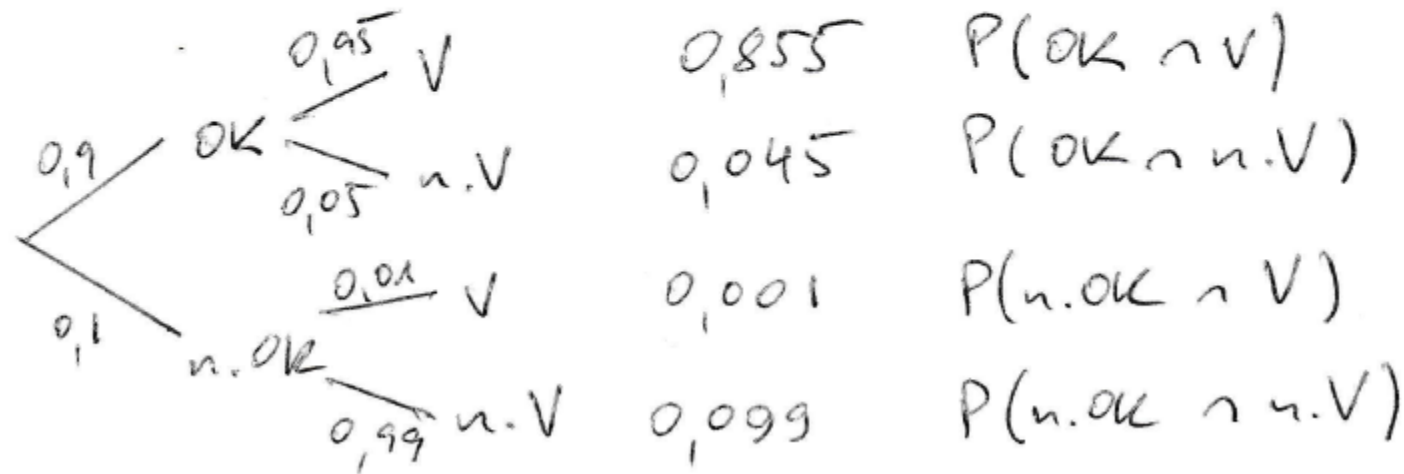
ohne zurücklegen

...



Baumdiagramm und Vierfeldertafel

- 90% der Schrauben sind ok
→ Von diesen werden 95% verkauft
→ Von den kaputten werden 1% verkauft





Baumdiagramm und Vierfeldertafel

	OK	n.OK	
V	0,855	0,001	0,856 $P(V)$
n.V.	0,045	0,099	0,144 $P(n.V.)$
	0,9 $P(OK)$	0,1 $P(n.OK)$	1



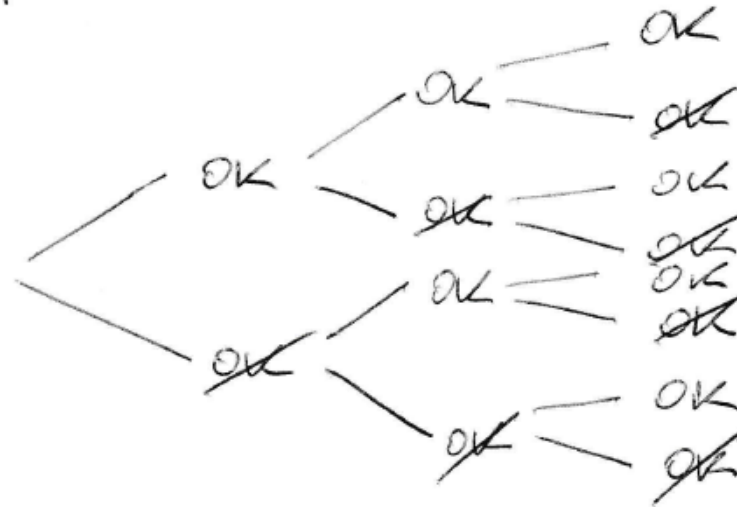
Baumdiagramm und Vierfeldertafel

1. Schraube ist verkauft und OK
2. Schraube ist verkauft
3. Eine verkaufte Schraube ist OK

$$P_v(\text{OK}) = \frac{P(v \cap \text{OK})}{P(v)} = \frac{0,855}{0,856} = 0,9988$$

Baumdiagramm und Vierfeldertafel

Schraubenproduktion :



- mit Zurücklegen
- 2 Wahrscheinlichkeiten (WK)



Baumdiagramm und Vierfeldertafel

WK, dass von 3... genau 2 OK sind

<u>I</u>	$\rightarrow \text{OK} \rightarrow \text{OK} \rightarrow \cancel{\text{OK}}$	$: 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1$
<u>II</u>	$\rightarrow \text{OK} \rightarrow \cancel{\text{OK}} \rightarrow \text{OK}$	$: 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,9$
<u>III</u>	$\rightarrow \cancel{\text{OK}} \rightarrow \text{OK} \rightarrow \text{OK}$	$: 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,9$
		$3 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^1$



Baumdiagramm und Vierfeldertafel

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\rightarrow P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot 0,9^2 \cdot (1-0,9)^{3-2}$$



Binomialverteilungen, kumulierte Verteilungen

$$B(n; p; k)$$

$$F(n; p; k)$$

	0,1	0,2	...		
0	-----	-----		⋮	1
1	-----	-----		⋮	0
2	-----	-----		45	0
3	-----	-----		44	0
⋮				⋮	
⋮				43	
			...	0,6	0,5

Gleiches
Schema,
aber kumuliert!

Also von 0 bis
zum k



Binomialverteilungen, kumulierte Verteilungen

Beispiel: Von 100 Leuten ($p = 0,2$ f. Raucher)
sind

- a) genau 3 Raucher
- b) höchstens 3 Raucher

$$a) P(X=3) = \binom{100}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{97} = B(100; 0,2; 3)$$

$$b) P(X \leq 3) = F(100; 0,2; 3)$$



Binomialverteilungen, kumulierte Verteilungen

WK für eine defekte Schraube: 5%

100 Schrauben werden untersucht...

- a) genau 7 defekte
- b) höchstens 7 defekte
- c) mindestens 7 defekte
- d) mehr als 2, aber weniger als 10 defekte

$$n = 100$$

$$p = 0,05$$

$$k = ?$$



Binomialverteilungen, kumulierte Verteilungen

$$a) \quad P(X=7) = B(100; 0,05; 7) = \binom{100}{7} \cdot 0,05^7 \cdot 0,95^{93}$$

$$b) \quad P(X \leq 7) = F(100; 0,05; 7) \\ \text{oder } \sum_{x=0}^7 \binom{100}{x} \cdot 0,05^x \cdot 0,95^{100-x}$$

$$c) \quad P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F(100; 0,05; 6) \\ \text{oder } \sum_{x=7}^{100} \binom{100}{x} \cdot 0,05^x \cdot 0,95^{100-x}$$

$$d) \quad P(3 \leq X \leq 9) = F(100; 0,05; 9) - F(100; 0,05; 2)$$



Kombinatorik

1) Zahlenschloss: 4 Ziffern, 0-9

$$\begin{array}{cccc} \underline{2} & \underline{8} & \underline{0} & \underline{9} \\ 10 & \cdot & 10 & \cdot & 10 & \cdot & 10 \end{array}$$

→ Reihenfolge wichtig? Ja

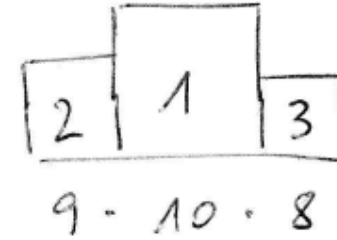
→ Wdh.? Ja

→ $n^k = 10^4$ Möglichkeiten



Kombinatorik

2) 10 Rennläufer auf Plätzen 1-3



→ Reihenfolge? Ja

→ Wdh. Nein

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

$$= \boxed{nPR}$$



Kombinatorik

3) Von 10 Personen werden 3 zufällig ausgewählt;

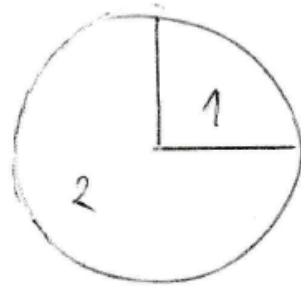
→ Reihenfolge? Nein

→ Wahl? Nein

$$\binom{n}{k} = \binom{10}{3} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \boxed{nCR}$$



Erwartungswert



Einsatz: 5 €

E_1 : 20 € Auszahlung

E_2 : 3 € - " -

→ Erwarteter Gewinn?

→ X : Gewinn in €

x_i	+ 15 €	- 2 €
$P(X=x_i)$	0,25	0,75



Erwartungswert

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X=x_i) = E(X)$$

$$E(X) = 0,25 \cdot 15 + 0,75 \cdot (-2) = 2,25$$

→ Fair ist ein Spiel nur, wenn $E(X) = 0$!



Erwartungswert

Beispiel:

Tasche OK : 90%

Tasche mit Farbfehler : 5%

Tasche mit Verschleißfehler : 3%

Tasche mit V. und F. : 2%

Kosten je Tasche : 80€

Erlös je Tasche : 150€

Farb- od. Verschl.f. : +30€ auf Kosten

Beides : neue Tasche



Erwartungswert

Erwarteter Gewinn? (X : Gewinn in €)

X_i	70	40	40	-10
$P(X_i)$	0,9	0,05	0,03	0,02

$$\begin{aligned} E(X) &= 0,9 \cdot 70 + 0,05 \cdot 40 + 0,03 \cdot 40 + 0,02 \cdot (-10) \\ &= 66 \text{€} \end{aligned}$$

- „Spiel“ ist **nicht** fair. Ein Unternehmen möchte ja einen Erwartungswert > 0 ...



Standardabweichung / Sigma-Umgebung

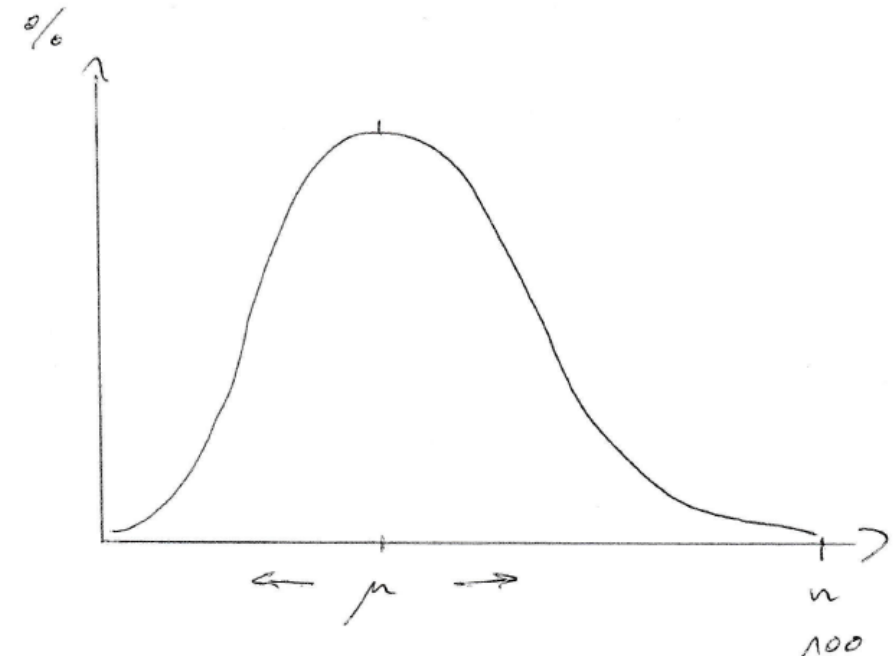
$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 68,3\%$$

$$P(\mu - 1,64\sigma \leq x \leq \mu + 1,64\sigma) = 90\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 95,4\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 99,7\%$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$





Konfidenzintervall

Würfel 4000-mal werfen. 700-mal soll eine 6 fallen. Sicherheit 99,7%

Relative Häufigkeit $h_n = \frac{x}{n} = \frac{700}{4000} = 0,175$

$$\frac{x}{n} \in \left[p - 3 \frac{\sigma}{n} ; p + 3 \frac{\sigma}{n} \right]$$

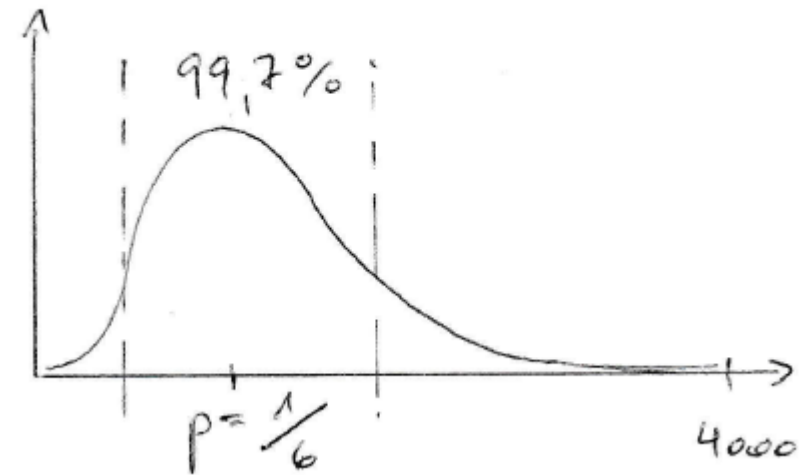


Konfidenzintervall

$$\left| \frac{x}{n} - p \right| \leq 3 \frac{\sigma}{n}$$

$$|0,175 - p| \leq 3 \cdot \frac{\sqrt{4000 p(1-p)}}{4000}$$

$$(0,175 - p)^2 \leq 9 \cdot \frac{p(1-p)}{4000}$$





Konfidenzintervall

$$0,030625 - 0,35p + p^2 \leq 9 \frac{p \cdot (1-p)}{4000}$$

$$\rightarrow 122,5 - 1400p + 4000p^2 \leq 9p - 9p^2$$

$$\Rightarrow 4009p^2 - 1409p + 122,5 \leq 0$$

$$\rightarrow p_1 = 0,1937 \quad p_2 = 0,1577$$



Konfidenzintervall

- Wahrscheinlichkeit p mittels pq-Formel / Mitternachtsformel / quadratischer Ergänzung bestimmen ist die **genaueste** Variante
- *Weitere Möglichkeit:* Statt p auszurechnen kann man auch die **relative Häufigkeit** einsetzen (in unserem Beispiel $h_n = 0,175$) und vergleichen, meist hinreichend genau!



Hypothesentests

Was sind Hypothesentests?

- Anhand einer **Stichprobe** herausfinden, ob eine Vermutung (Hypothese) wahr ist
 - Man stellt zuerst eine Nullhypothese N_0 auf
 - Dann gibt man ein Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) vor und bestimmt den Ablehnungsbereich
 - Stichprobe ziehen
 - Nach Test festlegen, ob Aussage **angenommen** oder **verworfen** werden muss



Hypothesentests

Fehler beim Testen von Hypothesen

- Nach gezogener Stichprobe ist man nun zu einem Ergebnis gekommen...
 - Es kann passieren, dass eine Hypothese als falsch angesehen wird, obwohl sie von Anfang an richtig war (**Fehler 1. Art**, α -Fehler)
 - Oder eine Hypothese ist falsch, wurde aber irrtümlich **nicht** verworfen, weil das Stichprobenergebnis noch im Annahmebereich liegt (**Fehler 2. Art**, β -Fehler)



Hypothesentests

Linksseitiger Hypothesentest

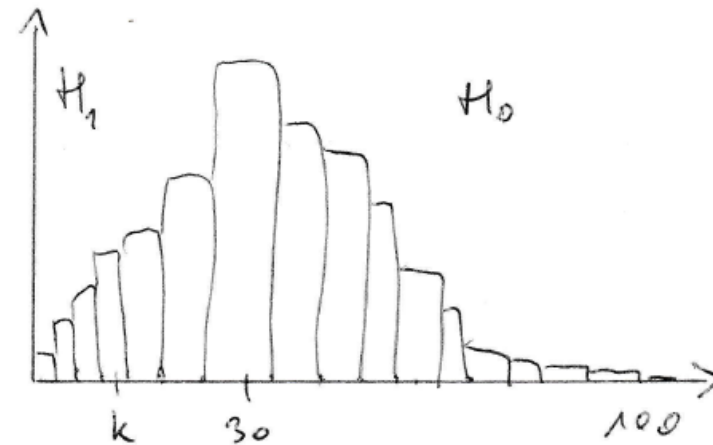
Mindestens 30% der Schüler lernen mit Videos. 100 werden befragt ($\alpha = 5\%$)

$$H_0: p_0 \geq 0,3$$

$$H_1: p_1 < 0,3$$

$$\alpha = 0,05$$

$$n = 100$$



Hypothesentests

Linksseitiger Hypothesentest

$$P(X \leq k_{\text{links}}) \leq \overbrace{0,05}^{\alpha}$$
$$F(100; 0,3; k_{\text{links}}) \leq 0,05$$

Test in Tabelle:

$$F(100; 0,3; 21) = 0,0288$$

$$F(100; 0,3; \underline{22}) = 0,0479 \quad \checkmark$$

$$F(100; 0,3; 23) = 0,0755 \quad \times$$

Ablehnen / Verwerfen $\bar{A} = \{0 \dots 22\}$
Hypothese bestätigt $A = \{23 \dots 100\}$



Hypothesentests

Rechtsseitiger Hypothesentest

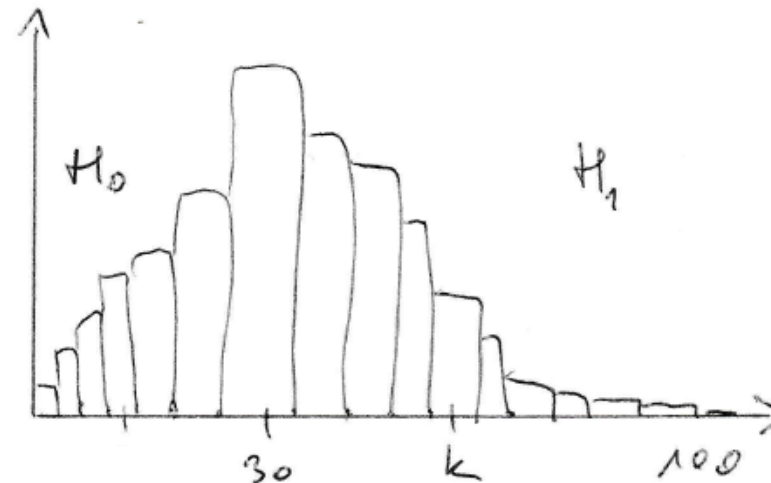
Höchstens 30% der Schüler lernen mit Videos. 100 werden befragt ($\alpha = 5\%$)

$$H_0: p_0 \leq 0,3$$

$$H_1: p_1 > 0,3$$

$$\alpha = 0,05$$

$$n = 100$$





Hypothesentests

Rechtsseitiger Hypothesentest

$$P(X \geq k_{\text{rechts}}) \leq \overset{\alpha}{0,05}$$
$$1 - P(X \leq k_{\text{rechts}} - 1) \leq 0,05$$

$$0,95 \leq P(X \leq k_{\text{rechts}} - 1)$$

$$0,95 \leq F(100; 0,3; k_{\text{rechts}} - 1)$$

$$0,947 = F(100; 0,3; 37)$$

$$0,966 = F(100; 0,3; 38) \quad \checkmark$$

→ Ablehnen / Verwerfen : $\bar{A} = \{39 \dots 100\}$
Annehmen : $A = \{0 \dots 38\}$



Hypothesentests

Zweiseitiger Hypothesentest

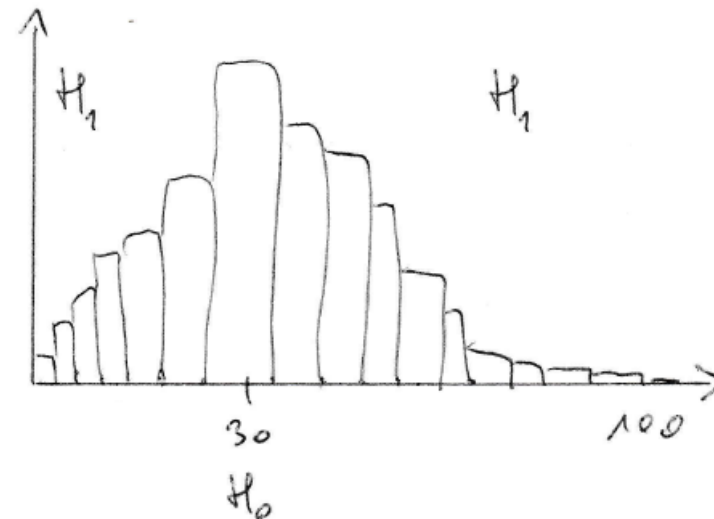
30% der Schüler lernen mit Videos.
100 werden befragt ($\alpha = 5\%$)

$$H_0: p_0 = 0,3$$

$$H_1: p_1 \neq 0,3$$

$$\alpha = 0,05$$

$$n = 100$$



Hypothesentests

Zweiseitiger Hypothesentest

$$\begin{array}{ll} \rightarrow P(X \leq k_l) \leq 0,025 & ! \quad P(X \geq k_r) \leq 0,025 \\ F(100; 0,3; k_l) \leq 0,025 & 0,975 \leq F(100; 0,3; k_r - 1) \\ F(100; 0,3; 20) = 0,0165 & 0,979 = F(100; 0,3; 39) \\ \bar{A} = \{0 \dots 20\} & \bar{A} = \{40 \dots 100\} \\ \downarrow & \downarrow \\ A = \{21 \dots 39\} & \end{array}$$



Hypothesentests

Beispiel:

Mindestens 96% der Ware ist OK.

→ Aussage wird bezweifelt und soll getestet werden.

→ 2000 Stücke, Irrtumswahrscheinl. 5%

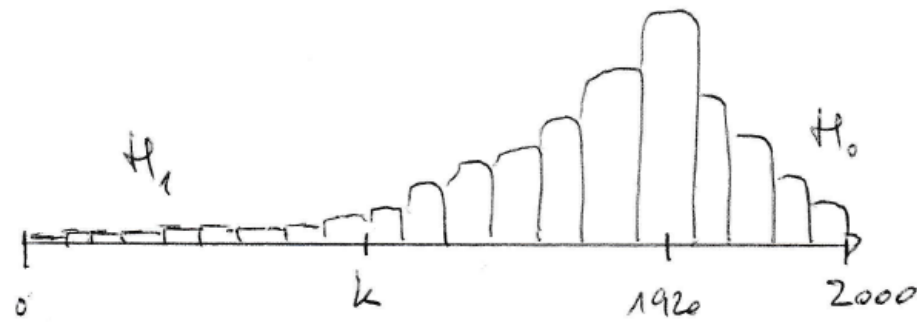
$$H_0: p_0 \geq 0,96 \quad n = 2000$$

$$H_1: p_1 < 0,96 \quad \alpha = 0,05$$

$$\sigma = \sqrt{2000 \cdot 0,96 \cdot 0,04} = 8,76 > 3 \quad \checkmark$$



Hypothesentests



α	1%	5%	10%
Wert	2,33	1,64	1,28

$$k = \mu \pm \text{Wert} \cdot \sigma$$

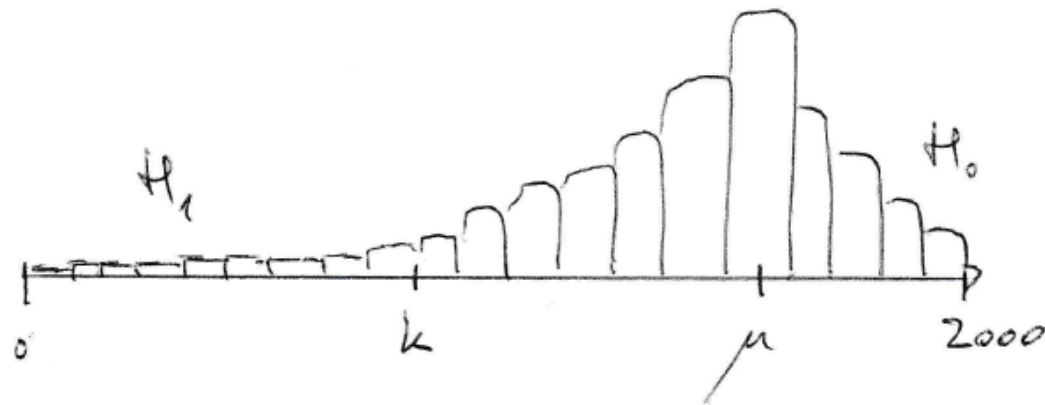
$$\rightarrow k = 1920 - 1,64 \cdot 8,76 = 1905,63$$

$$\rightarrow \bar{A} = \{0 \dots 1905\} \quad A = \{1906 \dots 2000\}$$



Hypothesentests

70% wählen Mathe als ihr Lieblingsfach.
Ihr behauptet es seien weniger. 2000 Schüler
werden gefragt. $\alpha = 5\%$





Hypothesentests

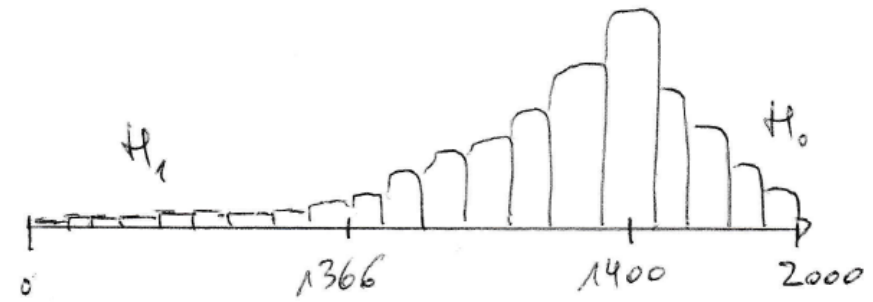
$$k = \mu \pm \text{Wert} \cdot \sigma$$

$$\sigma = \sqrt{2000 \cdot 0,7 \cdot 0,3} = 20,49 > 3 \checkmark$$

$$\bar{A} = \{0 \dots 1366\} \quad A = \{1367 \dots 2000\}$$

$$\rightarrow N = \frac{1366,39}{2000} = 0,683$$

→ Tatsächlich nur 68%, die Mathe wählen.



Hypothesentests

$$\begin{aligned}\beta &= P(X \geq 1367) = 1 - P(X \leq 1366) \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{1366 - 2000 \cdot 0,68 + 0,5}{\sqrt{2000 \cdot 0,68 \cdot 0,32}} \right) \\ &= 1 - \Phi(1,26) = 0,1038 = 10,38\%\end{aligned}$$

- Bestimmung Fehler 2. Art mittels Φ -Funktion